TD de MA 323
I. Série de Fourier et transformation de Fourier

Soit $\{\varphi_\omega(x)\}$ un système orthohonormé sur $(-\infty,+\infty)$. Si $f(x)$ est une fonction continue presque partout sur $(-\infty,+\infty)$, alors on peut expandre f en série de Fourier suivant ce système

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\varphi_n(x), \qquad a_n=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\varphi_n^*(x)\,dx,$$

si $\{\varphi_\omega(x)\}$ est un système discréte, et écrire l'intégrale de Fourier de f suivant ledit système,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\omega(x)\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\omega^*(t)\,f(t)\,dt,$$

s'il s'agit d'un système continu.

Si $\delta(x-x_0)$ est la fonction de Dirac, alors

$$\delta(x-x_0)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\varphi_n(x), \qquad a_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\,\varphi_n^*(x)\,dx=\varphi_n^*(x_0),$$

i.e.,

$$\delta(x-x_0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_n^*(x_0)\,\varphi_n(x),$$

et

$$\begin{aligned}\delta(x-x_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\omega(x)\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\omega^*(t)\,\delta(t-x_0)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\omega^*(x_0)\,\varphi_\omega(x)\,d\omega,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\delta(x-x_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\omega^*(x_0)\,\varphi_\omega(x)\,d\omega:$$

c'est la representation continue de la fonction de Dirac suivant le systeme $\{\varphi_\omega(x)\}$.

Définition: On appelle fonction propre d'une particule dans le potentiel $V(x)$, toute fonction d'onde (non nulle), solution de l'équation de Schrodinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x).$$

Si la fonction d'onde $\psi(x)$ est une fonction propre de la particule dans le poitentiel $V(x)$, le nombre E, appelé niveau d'energie en mécanique quantique est appelé valeur propre associée à la fonction propre $\psi(x)$. La fonction d'onde de l'équation de schrodinger vérifie la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,dx=1:$$

c'est la condition pour que la la particule se trouve quelque part sur la droite $(-\infty,+\infty)$. Mathématiquement, cette dernière condition est la condition de normalisation des fonction propres de la particule. Pour la détermination des fonctions propres ψ, on impose les conditions aux limites homogènes, i.e.; nulles. Par exemple, pour le puis de potentiel

$$V(x)=\begin{cases}0, \text{ si } 0<x<a,\\ +\infty, \text{ si } x\notin(0,\ a),\end{cases}$$

on doit imposer sur $\psi(x)$ les conditions aux limites $\psi(0)=\psi(a)=0$.

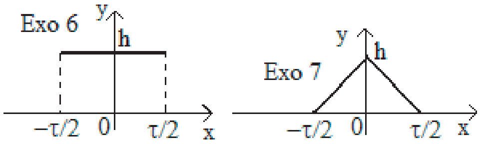

FIG. 7: Figures relatives aux exercices 6 et 7

Exercice 1. Trouver les fonctions d'onde et les niveaux d'energie correspondant de la particule dans le puis de potentiel $V(x)=\begin{cases} 0, \text{ si } 0<x<a, \\ +\infty, \text{ si } x\notin(0,\ a). \end{cases}$

Exercice 2. On donne le potentiel $V(x)=\begin{cases} 0, \text{ si } 0<x<a, \\ V_0, \text{ si } a<x<a+b, \\ +\infty, \text{ si } x<0,\ x>a+b. \end{cases}$ On pussopose que $V_0>E$, E étant le niveau d'énergie; ce qui correspond au cas le plus important.
i) Déssiner le potentiel $V(x)$;
ii) Trouver les niveaux d'énergie E et les fonctions d'onde correspondentes.

Exercice 3. Ecrire la série de Fourier de la fonction de Dirac $\delta(x-x_0)$ pour $x_0=0$ suivant le système des fonctions propres de la particule dans le puit de potentiel $V(x)=\begin{cases} 0, \text{ si } -a/2<x<a/2, \\ +\infty, \text{ si } x\notin(-a/2,\ a/2). \end{cases}$ Soit $\delta_n(x)$ la suite des sommes partielles de la série trouvée. Tracer les courbes de $\delta_n(x)$ avec $n=1,\ 2,\ 3,$ et 4.

Exercice 4. Pour écrire la représentation continue de la fonction $\delta(x)$, on peut utiliser l'ensemble des fonctions d'onde $\psi_\omega(x)=A\exp(i\omega x)$ de la particule libre $(V(x)=0$ pour tout $x)$. Sachant que $\lim\limits_{\omega\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{t}=\pi$, montrer que

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\omega\to\infty}\frac{\sin\omega x}{x}.$$

Définition: Soit $f(x)$ une fonction transformable. On appelle **caractéristique spectrale** de la fonction $f(x)$, sa transformée de Fourier

$$g(\omega)=\int_{-\infty}^{+}f(t)\exp(-i\omega t)\,dt.$$

On appele **spectre** de la fonction $f(x)$, le module de la caractéristique spectrale de cette fonction:

$$\Phi(\omega)=|g(\omega)|=\left|\int_{-\infty}^{+}f(t)\exp(-i\omega t)\,dt\right|.$$

Exercice 5. Montrer que la caractéristique spectrale de la fonction $f(x)=\begin{cases} \exp(-ax), \text{ si } x>0, \\ 0, \text{ si } x<0 \end{cases}$ $a>0$ est $g(\omega)=\frac{1}{a+i\omega}$. Construire le graphique du spectre de la fonction $f(x)$.

Exercice 6. Calculer le spectre de l'impulse rectangulaire de hauteur h et de longueur τ (Fig.) et tracer le graphique de du spectre.

Exercice 6. Calculer le spectre de l'impulse de la forme triangulairede base τ et de hauteur h (Fig.) et tracer le graphique de du spectre.

Exercice 7. Calculer le spectre de l'impulse cosinusoidale découpée du cosinusoide de période 2τ et d'amplitude h (Fig.) (indication: la fonction est définie par l'égalité $f(x)=\begin{cases} h\cos\frac{\pi x}{\tau}, & |x|\leq\tau/2, \\ 0, & |x|>\pi/2. \end{cases}$

II: Transformation de Laplace

Exercice 1. Trouver l'image de la fonction $f(x)=a^x$.
Exercice 2. Trouver l'image de la fonction $f(x)=\cos^3 x$.
Exercice 3. Trouver l'image de la fonction $f(x)=\sinh ax$.
Exercice 4. Trouver l'image de la fonction $f(x)=\sinh ax\sin bx$.
Exercice 5. Trouver l'image de la fonction $f(x)=x\cosh ax$.

Exercice 6. Trouver l'image de la fonction $f(x) = \cosh ax \cos bx$.
Exercice 7. Trouver l'image de la fonction $f(x) = x \sinh bx$.
Exercice 8. Trouver l'originale de la fonction $L(p) = \frac{p}{p^2-2p+5}$.
Exercice 9. Trouver l'originale de la fonction $L(p) = \frac{1}{p^3-8}$.
Exercice 10. Trouver l'originale de la fonction $L(p) = \frac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$.
Exercice 11. Trouver l'originale de la fonction $L(p) = \frac{p+2}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$.
Exercice 12. Trouver à l'aide du théorème de convolution l'originale de la fonction $L(p) = \frac{p}{p^4-1}$.
Exercice 13. Trouver l'originale de $y''(x) - y'(x) - y(x)$, si $y(0) = y'(0) = 0$ et $Y(p) := L(y(x))$.
Exercice 14. Trouver l'originale de $y'(x) + y(x) + \int_0^x y(t)\,dt$, si $y(0) = 1$ $\;Y(p) := L(y(x))$.
Exercice 15. Trouver le produit de convolution de x par $\cos x$.
Exercice 16. Trouver à l'aide du théorème de convolution l'originale de la fonction $L(p) = \frac{p^2}{(p+1)^2}$.
Exercice 17. Trouver la solution de l'équation intégrale $y(x) = ax + \int_0^x y(t)\sin(x-t)\,dt$.
Exercice 18. Trouver la solution de l'équation intégrale $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \exp(x-t)\sin(x-t)\,dt$.
Exercice 19. Trouver la solution de l'équation intégrale $\int_0^x y(t)\sin(x-t)\,dt = 1 - \cos x$.
Exercice 20. Trouver la solution de l'équation intégrale $\int_0^x y(t)\exp(x-t)\,dt = y(x) - \exp(x)$
Exercice 21. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'' - x + y + z = 0, \\ x + y'' - y + z = 0, \\ x + y - z'' - z = 0, \\ x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0,\ x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 22. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'' - 4x - y' + y = 1, \\ x' + 6x + y'' - y' = \exp(4t), \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ x'(0) = x_1,\ y'(0) = y_1. \end{cases}$$

Exercice 22. Le deplacement d'une particule chargée de ,asse m et de charcxge e, se trouvant dant dans le champ électrique E, parallèle à l'axe Ox, et dans le champ ,agnétique H, parallèle à l'axe Oz, est défini par le système différentiel

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = Ee + \frac{eH}{c}\frac{dy}{dt}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{eH}{c}\frac{dx}{dt}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} = 0. \end{cases} \qquad (c = conste)$$

Trouver x, y, z, si la particule à l'instant initial $t = 0$ a la vitesse (u, v, w) et se trouve à l'origine des coordonnées.

III: Formulation des problèmes aux limites pour les équations fondamentales de la physique mathématique

Déterminer le type de chacune des équations suivantes.
Exercice 1. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 3\frac{\partial u}{\partial z} - u = 0.$
Exercice 2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2xy\frac{\partial u}{\partial x} + 3xyu = 0.$
Exercice 3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 3x^2\frac{\partial u}{\partial y} + y \sin xu + x\exp(-y) = 0.$
Exercice 4. $y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$
Exercice 5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - x^2 y = 0.$
Exercice 6. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0.$
Déterminer le type de chacune des équations suivantes lelong de chacune des solutions indiquées.
Exercice 7. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = 0,\ \ u = x^2 + y^2.$
Exercice 8. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = 8,\quad u = x^2 + y^2;\ \ u = 2\sqrt{2}xy.$
Exercice 9. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 = 0,\ \ u = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right);\ u = 2y^2.$

Exercice 10. $5\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^5 - 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 25\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 150y = 0,\ \ u = \frac{x^2}{2} + y^3 + \frac{5}{7}xy.$

Ecrire chacune des équations suivantes dans le système des coordonnées (ξ, η) :

Exercice 11. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 9\frac{\partial u}{\partial x} + 9\frac{\partial u}{\partial y} - 9u = 0,\ \xi = x + y,\ \eta = x.$

Exercice 12. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \xi = y^2 - x^2,\ \eta = x^2.$

Exercice 13. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + y^2\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\left(1 + y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \xi = x + \arctan y,\ \eta = x - \arctan y.$

IV. Résolution du problèmes de Cauchy pour les équations de la corde vibrante et de la chaleur

Utiliser les formules de D'Alembert pour résoudre chacun des exercices suivants:

Exercice 1. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u(0,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x > 0.$

Exercice 2. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u_x(0,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x > 0.$

Exercice 3. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u(0,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x > 0.$

Exercice 4. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u_x(0,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x > 0.$

Toute fonction $f(x - at)$ d'argument $x - at$ est appelée onde directe. Trouver sous forme d'onde directe la solution de chacun des exercices suivants:

Exercice 5. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u(0,t) = \mu(t),\ t > 0,\ \ u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ x > 0.$

Exercice 6. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u_x(0,t) = \nu(t),\ t > 0,\ \ u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ x > 0.$

Exercice 7. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u_x(0,t) = \nu(t),\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x > 0.$

Appliquer les formule de Poisson pour l'équation de la chaleur pour résoudre chacun des exercices suivants:

Exercice 8. $u_t = a^2 u_{xx},\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u(0,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ x > 0.$

Exercice 9. $u_t = a^2 u_{xx},\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u_x(0,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ x > 0.$

Exercice 10. $u_t = a^2 u_{xx} - hu,\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u(0,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ x > 0.$

Exercice 11. $u_t = a^2 u_{xx} - h,\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u_x(0,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ x > 0.$

Exercice 12. $u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x,t),\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u(0,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = 0,\ x > 0.$

Exercice 13. $u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x,t),\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u_x(0,t) = 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ x > 0.$

Exercice 14. $u_t = u_{xx},\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{l}, & 0 \le x \le l, \\ 1 + \frac{x}{l}, & -l \le x \le 0, \\ 0, & x > l \text{ et } x < -l. \end{cases}$ Ecrire le resultat en termes de la fonction $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp\left(-t^2\right) dt.$

Exercice 15. $u_t = a^2 u_{xx},\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} u_0, & x_1 \le x \le x_2, \\ 0, & x < x_1 \text{ et } x > x_2, \end{cases}$ Ecrire le resultat en termes de la fonction $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp\left(-t^2\right) dt.$

IV. Résolution de Fourier des problèmes aux limites

Exercice 1. Construire l'ensemble des solutions $u(x,t)$ de l'équation $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ayant la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Exercice 2. Dans la semi-bande $a < x < b,\ t > 0$ construire la solution du problème aux limites $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(a,t) = u(b,t) = 0$. La solution est-elle unique?

Résoudre les problèmes suivants dans la semi-bande $0 < x < l,\ t > 0$ pour l'équation $u_{tt} = a^2 u_{xx}$:

Exercice 3. $u(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \sin\frac{2\pi}{l}x.$

Exercice 4. $u(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \sin\frac{\pi}{2l}x + \sin\frac{3\pi}{2l}x.$

Exercice 5. $u_x(0,t) = u(l,t) = 0,\ u(x,0) = \cos\frac{\pi}{2l}x, u_t(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2l}x + \cos\frac{5\pi}{2l}x.$

Exercice 6. $u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ \mathrm{u}(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ h > 0.$

Résoudre les problèmes suivants dans la semi-bande $0 < x < l,\ t > 0.$

Exercice 7. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x),\ \ u_x(0,t) = \alpha,\ u_x(l,t) + hu(l,t) = \beta,\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

Exercice 8. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x),\ \ u(0,t) = \alpha,\ u(l,t) = \beta,\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$

Exercice 9. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = \nu(t),\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x).$

Résoudre les problèmes suivants dans la semi-bande $0 < x < l,\ t > 0$ pour l'équation $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ satisfaisant les conditions inirtiale $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$:

Exercice 10. $u(x,0) = u(l,0) = 0,\ f(x,t) = A\exp(-t)\sin\frac{\pi}{l}x.$

Exercice 11. $u(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ f(x,t) = A\sin t.$

Exercice 12. $u_x(0,t) = u(l,t) = 0,\ f(x,t) = A\exp(-t)\cos\frac{\pi}{2l}x.$

Résoudre chacun des problèmes suivants:

Exercice 14. $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = A\exp(-t)$, $u(x,0) = \frac{Aa}{\sinh\frac{l}{a}}\cosh\frac{x}{a}$, $u_t(x,0) = -\frac{Aa}{\sinh\frac{l}{a}}\cosh\frac{x}{a}$.

Exercice 15. $u_{tt} = a^2u_{xx} + \sin 2t$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = \frac{2}{a}\sin\frac{2l}{a}\sin 2t$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = -2\cos\frac{2x}{a}$, $0 < x < l$, $t > 0$.

Résoudre les problèmes suivants dans la semi-bande $0 < x < l$, $t > 0$ pour l'équation $u_t = a^2u_{xx}$:

Exercice 16. $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $u(x,0) = Ax$.

Exercice 17. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = U$.

Exercice 18. $u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0$, $u(x,0) = U$, $h > 0$.

Résoudre dans la semi-bande $0 < x < l$, $t > 0$ les problèmes suivants:

Exercice 19. $u_t = a^2u_{xx} - \beta u$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$.

Exercice 20. $u_t = a^2u_{xx} - \beta u$, $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = \sin\frac{\pi}{2l}x$.

Exercice 21. $u_t = a^2u_{xx} - \beta u + \sin\frac{\pi}{l}x$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $u(x,0) = 0$.

Exercice 22. $u_t = a^2u_{xx}$, $u_x(0,t) = At$, $u_x(l,t) = T$, $u(x,0) = 0$.

V. Fonctions harmoniques

Exercice 1. Ecrire l'équation de Laplace dans le système des coordonnées cylindriques $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = \zeta$.

Exercice 2. Ecrire l'équation de Laplace dans le système des coordonnées sphéroidales $x = \xi\eta\sin\varphi$, $y = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}$, $z = \xi\eta\cos\varphi$.

Exercice 3. Pour quelles valeurs de k la fonction $u(x,y) = \exp(2x)\cosh ky$ est-elle harmonique?

Exercice 4. Montrer que si $u(x)$ est une fonction harmonique, alors $v(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}}u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ sera aussi harmonique. Ici, $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Trouver la solution $u(x,y)$ de l'équation de Laplace dans le rectangle $0 < x < p$, $0 < y < s$, satisfaisant les conditions aux limites suivantes:

Exercice 5. $u(0,y) = u_x(p,y) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u(x,s) = f(x)$.

Exercice 6. $u_x(0,y) = u_x(p,y) = 0$, $u(x,0) = A$, $u(x,s) = Bx$.

Exercice 7. $u(0,y) = U$, $u_x(p,y) = 0$, $u_y(x,0) = T\sin\frac{\pi}{2p}x$, $u(x,s) = 0$.

Trouver la solution $u(x,y)$ de l'équation de Laplace dans la semi-bande $0 < x < \infty$, $0 < y < l$, satisfaisant les conditions aux limites suivantes:

Exercice 8. $u(x,0) = u_y(x,l) = 0$, $u(0,y) = f(y)$, $u(\infty,y) = 0$.

Exercice 9. $u_y(x,0) = u_y(x,l) + hu(x,l) = 0$, $u(0,y) = f(y)$, $u(\infty,y) = 0$, $h > 0$.

Trouver la fonction $u(r,\varphi)$, harmonique dans l'anneau $a < r < b$ et satisfaisant les conditions aux limites suivantes:

Exercice 10. $u(a,\varphi) = 0$, $u(b,\varphi) = \cos\varphi$.

Exercice 11. $u_r(a,\varphi) = q\cos\varphi$, $u(b,\varphi) = Q + T\sin 2\varphi$.

Trouver la fonction $u(r,\varphi)$, harmonique dans le secteur circulaire $0 < r < R$, $0 < \varphi < \alpha$, et satisfaisant les conditions aux limites suivantes:

Exercice 12. $u(r,0) = u(r,\alpha) = 0$, $u(R,\varphi) = A\varphi$.

Exercice 13. $u_\varphi(r,0) = u(r,\alpha) = 0$, $u(R,\varphi) = f(\varphi)$.