Chapitre VI. Fonctions harmoniques

XVIII. DÉFINITIONS

La modélisation mathématiques des phénomènes de la physique (phénomènes oscillatoires, phénomènes de la diffusion, phénomènes de la conductivité thermique) conduit généralement aux EDP quasilinéaires de type elliptique. Les EDP quasilinéaires les plus importantes et les plus rencontrées en physique sont les équations de Poisson

$$-\Delta u = f(x) \tag{75}$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ est l'opérateur de Laplace. Quand $f(x) \equiv 0$, l'équation (75) prend la forme

$$\Delta u = 0 \tag{76}$$

et est appelée équation de Laplace.

Définition: Une fonction $u(x)$ sera dite harmonique dans un domaine fini $T \subseteq R^n$ si elle est de la classe $C^2(T)$ et vérifie l'équation de Laplace dans le domaine T.

Définition: Une fonction $u(x)$ sera dite harmonique dans un domaine infini T si elle est de la classe $C^2(T)$, vérifie l'équation de Laplace dans le domaine T, et satisfait pour une certaine constante $C > 0$ la condition

$$|u(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-2}}, \tag{77}$$

n étant la dimension de l'espace.

Si $n = 2$, la condition (77) signifie que la fonction u doit être bornée.

Exemple. La fonction $u(x) = 1$ est harmonique dans tout domaine fini T et dans tout domaine (fini ou infini) de $\mathbb{R}^2$. Cette fonction n'est harmonique dans aucun domaine infini T de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Si nous désignons par $S = \partial T$ la frontière du domaine T, alors le problème aux limites pour l'équation de Laplace dans le domaine T se formule de la façon suivante: Trouver la fonction $u(x)$ harmonique dans le domaine T et vérifiant les conditions aux frontières

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_S = v,$$

α, β, et v étant trois fonctions données et continues sur la surface S et telles que $\alpha(x), \beta(x) \geq 0$ et $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ et n étant la normale extérieure à la surface S. Le premier problème aux limites pour l'équation de Laplace est dénomé *problème de Dirichlet* alors que le deuxième problème est appelé *problème de Neumann.*

XIX. EQUATION DE LALACE DANS UN SYSTÈME DES COORDONNÉES CURVILIGNES ORTHOGONALES

Soientt x_1, x_2, ..., x_n le système des coordonnées cartésiennes et soient q_1, q_2, ..., q_n un système des coordonnées curvilignes donné par la transformation

$$q_j = f_j(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{78}$$

dont la résolution par rapport aux coordonnées cartésiennes donne

$$x_j = \varphi_j(q_1, q_2, ..., q_n). \tag{79}$$

Définition: Le ystème des coordonnées curvilignes $(q_1, q_2, ..., q_n)$ est dit orthogonal si

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_k} + ... + \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_n}{\partial q_k} = 0, \quad i \neq k. \tag{80}$$

Dans la suite de ce chapitre, on se limitera qu'aux systèmes de coordonnées curvilignes $(q_1, q_2, ..., q_n)$ orthogonaux, i.e., satisfaisant la condition (80).

Définition: On appelle *paramétre de Lamé* du système des coordonnées curvilignes $(q_1, q_2, ..., q_n)$, les nombres

$$H_i = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n. \tag{81}$$

Définition: On appelle *opérateur de Laplace* dans le système des coordonnées curvilignes $(q_1, q_2, ..., q_n)$, l'opérateur noté Δ et défini par

$$\Delta = \frac{1}{H_1 H_2 ... H_n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{H_1 H_2 ... H_n}{H_l^2} \frac{\partial}{\partial q_l}\right). \tag{82}$$

Définition: On appelle équation de Laplace dans le système des coordonnées curvilignes $(q_1, q_2, ..., q_n)$, l'équation

$$\frac{1}{H_1 H_2 ... H_n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{H_1 H_2 ... H_n}{H_l^2} \frac{\partial u}{\partial q_l}\right) = 0. \tag{83}$$

Exemple. Ecrire l'équation de Laplace dans le système des coordonnées polaires (r, φ) défini par $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Déduire la solution de l'équation de Laplace qui dépend seulement de r, i.e., $u = u(r)$.
Résol. Calculons d'abord les paramétres de Lamé par la formule (81):

$$\begin{aligned} H_r &= \sqrt{\left(\frac{\partial r\cos\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial r\sin\varphi}{\partial r}\right)} = 1; \\ H_\varphi &= \sqrt{\left(\frac{\partial r\cos\varphi}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r\sin\varphi}{\partial \varphi}\right)} = r. \end{aligned}$$

Servons nous maintenant de la formule (83) pour écrire l'équation de Laplace:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1\times r}{1^2}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1\times r}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right] &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= 0. \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Si $u = u(r)$, alors $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ et on a $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{dr} = \frac{C_1}{r} \Leftrightarrow u(r) = C_1 \ln r + C_2.$$

On trouve alors $u(r) = C_1 \ln r + C_2$. En prenant $C_2 = 0$ et $C_1 = -1$, on trouve la solution $u(r) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ qui est harmonique dans tout domaine ne contenant pas l'origine. La fonction $u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$ est appelée solution fondamentale de l'équation de Laplace sur le plan.
Exemple. Ecrire l'équation de Laplace dans le système des coordonnées spheriques (r, φ, θ) défini par $x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta$. Déduire la solution de l'équation de Laplace qui dépend seulement de r, i.e., $u = u(r)$.
Résol. Calculons d'abord les paramétres de Lamé par la formule (81):

$$\begin{aligned} H_r &= \sqrt{\left(\frac{\partial r\cos\varphi\sin\theta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial r\sin\varphi\sin\theta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial r\cos\theta}{\partial r}\right)^2} = 1; \\ H_\varphi &= \sqrt{\left(\frac{\partial r\cos\varphi\sin\theta}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r\sin\varphi\sin\theta}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r\cos\theta}{\partial \varphi}\right)^2} = r\sin\theta; \\ H_\theta &= \sqrt{\left(\frac{\partial r\cos\varphi\sin\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial r\sin\varphi\sin\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial r\cos\theta}{\partial \theta}\right)^2} = r. \end{aligned}$$

Servons nous maintenant de la formule (83) pour écrire l'équation de Laplace:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\times r\sin\theta\times r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1\times r\sin\theta\times r}{1}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1\times r\sin\theta\times r}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1\times r\sin\theta\times r}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right] &= 0\Leftrightarrow\\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) &= 0.\end{aligned}$$

On trouve alors

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0.$$

Si $u=u(r)$, alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) &= 0\Leftrightarrow\\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) &= 0\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0\\ &\Leftrightarrow\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{C_1'}{r^2}\Leftrightarrow u(r)=\frac{C_1}{r}+C_2.\end{aligned}$$

On trouve alors $u(r)=\frac{C_1}{r}+C_2=\frac{C_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+C_2$, qui est une fonction harmonique dans tout domaine ne contenant pas l'origine. La solution $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ est appelée solution fondamentale de l'équation de Laplace dans l'espace tri-dimensionnel.

XX. RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LE DISQUE

Dans cette section, on se propose de trouver la fonction univoque $u(r,\varphi)$, harmonique dans le disque centré à l'origine et de rayon R

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\qquad r<R,\ 0<\varphi<2\pi \tag{84}$$

vérifiant la condition aux frontières

$$u(R,\varphi)=f(\varphi),\quad 0\le\varphi\le 2\pi. \tag{85}$$

A. Résolution du problème de Dirichlet (84),(85)

Avant de passer à la résolution du problème (84),(85), notons que sur le disque centré à l'origine et de rayon R, (r,φ) et $(r,\varphi+2\pi)$ définissent un et un même point de sorte que pour toute fonction univoque $u(r,\varphi)$, on aura $u(r,\varphi+2\pi)=u(r,\varphi)$, ce qui revient à dire que $u(r,\varphi)$ est une fonction $2\pi-$ périodique par rapport à φ.

Résolvons le problème (84),(85) par la méthode de Fourier. Cherchons alors la solution non triviale de l'équation (84) sous la forme $u(r,\varphi)=\rho(r)\Phi(\varphi)$. Insérant cette expression de u dans l'équation (84), on trouve

$$\frac{r}{\rho(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{d\rho(r)}{dr}\right)=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=\lambda,$$

i.e.,

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\rho(r)}{dr}\right)-\lambda\rho(r) = 0, \tag{86}$$

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda\Phi(\varphi) = 0. \tag{87}$$

Puisaue u est une fonction $2\pi-$ périodique, $\Phi(\varphi)$ sera une fonction $2\pi-$ périodique.

Le polynôme caractéristique de l'équation (87) est $P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{-\lambda}$.
(i) Si $\lambda < 0$, la solution générale de (87) sera $\Phi(\varphi) = K_1 \exp\left(\sqrt{-\lambda}\varphi\right) + K_2 \exp\left(-\sqrt{-\lambda}\varphi\right)$ qui n'est périodique que si $K_1 = K_2 = 0$;
(ii) Si $\lambda = 0$, la solution générale de (87) sera $\Phi(\varphi) = A_0 + B_0\varphi$, qui sera $2\pi-$ périodique que si $B_0 = 0$. On a ainsi la solution $\Phi_0(\varphi) = A_0 \neq 0$ de l'équation (87) correspondante à $\lambda = 0$. Pour cette valeur de $\lambda = 0$, l'équation (86) devient

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{d\rho(r)}{dr}\right) = 0 \Leftrightarrow \rho_0(r) = C_0 + \frac{C_1}{r}.$$

Ainsi à $\lambda = 0$ correspond $u(r,\varphi) = \Phi_0(\varphi)\rho_0(r) = A_0\left(C_0 + \frac{C_1}{r}\right) = A_0C_0 + \frac{A_0C_1}{r}$, qui est défini en $r = 0$ que si $C_1 = 0$. On trouve alors pour $\lambda = 0$, la solution

$$u_0(r,\varphi) = A_0C_0 = \frac{1}{2}a_0.$$

(iii) Si $\lambda > 0$, alors la solution générale de (87) sera $\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$ qui sera $2\pi-$ périodique si et seulement si $\sqrt{\lambda} = n \Leftrightarrow \lambda = \lambda_n = n^2$. Pour chqaue λ_n, on a

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi.$$

L'équation (86) sous la condition $\lambda = \lambda_n = n^2$ devient

$$\begin{aligned} r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\rho(r)}{dr}\right) - (n\pi)^2\rho(r) &= 0 \Leftrightarrow \\ r^2\frac{d^2\rho(r)}{dr^2} + r\frac{d\rho(r)}{dr} - (n\pi)^2\rho(r) &= 0. \end{aligned}$$

On note que $r^2\frac{d^2\rho(r)}{dr^2} + r\frac{d\rho(r)}{dr} - n^2\rho(r) = 0$ est une équation d'Euler dont on peut chercher des solutions non triviales sous la forme $\rho = r^m$. Alors

$$(m(m-1)) + m - (n\pi)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm n,$$

d'où $\rho(r) = r^{\pm n}$. La solution générale de (86) avec $\lambda = \lambda_n = n$ est alors $\rho_n(r) = A'_n r^n + B'_n r^{-n}$,qui est définit à l'origine que si $B'_n = 0$, d'où

$$\rho_n(r) = A'_n r^n$$

Combinant $\Phi_n(\varphi)$ et $\rho_n(r)$, on trouve

$$u_n(r,\varphi) = a_n r^n\cos n\varphi + b_n r^n\sin n\varphi.$$

Cherchons la solution du problème (84),(85) sous la forme

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^n\cos n\varphi + b_n r^n\sin n\varphi. \tag{88}$$

Si nous décomposons la fonction aux frontière $f(\varphi)$ en série de Fourier suivant le système des fonctions propres, i.e., nous ércivons

$$f(\varphi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\cos n\varphi + f'_n\sin n\varphi$$

avec

$$f_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta, \quad f'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta, \tag{89}$$

alors la condition aux frontière (85) nous donne

$$\frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\cos n\varphi + f'_n\sin n\varphi = f(\varphi) = u(R,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n R^n\cos n\varphi + b_n R^n\sin n\varphi,$$

ce qui donne

$$a_0 = f_0, \quad a_n = \frac{f_n}{R^n}, \quad b_n = \frac{f_n'}{R^n},$$

de sorte que la solution du problème (84),(85) soit

$$u(r,\varphi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (f_n \cos n\varphi + f_n' \sin n\varphi), \qquad r < R, \tag{90}$$

où f_n et f_n' sont données par les égalités (89).

Remarque: si on résolvait le problème de dirichlet à l'extérieur du disque $(r \geq R)$, on devait obtenir pour solution

$$u(r,\varphi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (f_n \cos n\varphi + f_n' \sin n\varphi), \qquad r > R \tag{91}$$

B. Formule de Poisson pour le disque

Pour obtenir lq for;ule de Poisson à l'intérieur du disque, nous remplaçons dans (90) les coefficients f_n et f_n' par leurs expressions données par (89):

$$\begin{aligned}
u(r,\varphi) &= \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\varphi + f_n' \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin n\varphi \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\cos n\varphi \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta + \sin n\varphi \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos n\varphi \cos n\theta + \sin n\varphi \sin n\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - \varphi)\right] d\theta,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - \varphi)\right] d\theta. \tag{92}$$

Evaluons$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta-\varphi)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - \varphi) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\text{Re } \exp[i(\theta - \varphi)]\right)^n \\
&= \text{Re } \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\exp[i(\theta-\varphi)]\right)^n\right] - \frac{1}{2} \\
&= \text{Re } \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\exp[i(\theta-\varphi)]\right)^n\right] - \frac{1}{2} \\
&= \text{Re } \left[\frac{1}{1 - \frac{r}{R}\exp[i(\theta-\varphi)]}\right] - \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

car $\left|\frac{r}{R}\exp\left[i\left(\varphi-\theta\right)\right]\right|=\frac{r}{R}<1$; Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}\cos n\left(\theta-\varphi\right) &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{1-\frac{r}{R}\exp\left[i\left(\theta-\varphi\right)\right]}\right]-\frac{1}{2}\\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{1-\frac{r}{R}\cos\left(\theta-\varphi\right)+i\frac{r}{R}\sin\left(\theta-\varphi\right)}{\left(1-\frac{r}{R}\cos\left(\theta-\varphi\right)\right)^{2}+\left(\frac{r}{R}\right)^{2}\sin^{2}\left(\theta-\varphi\right)}\right]-\frac{1}{2}\\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{1-\frac{r}{R}\cos\left(\theta-\varphi\right)+i\frac{r}{R}\sin\left(\theta-\varphi\right)}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{2}-2\frac{r}{R}\cos\left(\theta-\varphi\right)}\right]-\frac{1}{2}\\
&= \frac{R^{2}-r^{2}}{2\left(R^{2}-2rR\cos\left(\theta-\varphi\right)+r^{2}\right)},
\end{aligned}$$

et on obtient finalement

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}\cos n\left(\theta-\varphi\right)=\frac{R^{2}-r^{2}}{2\left(R^{2}-2rR\cos\left(\theta-\varphi\right)+r^{2}\right)}.$$

En substituqnt cette expression dqns (92), nous obtenons la formule

$$u\left(r,\varphi\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(\theta\right)\left(R^{2}-r^{2}\right)}{R^{2}-2rR\cos\left(\theta-\varphi\right)+r^{2}}d\theta \qquad (93)$$

appelée *formule de Poisson* pour le problème de Dirichlet à l'intérieur du disque. L'intégrale à gauche de la formule (93) est appelée intégrale de Poisson pour le disque.

Remarque: si on chercher à dériver la formule de Poisson pour le problème de Dirichlet à l'extérieur du disque, on devait utuliser la solution (89) et obtenir la formule

$$u\left(r,\varphi\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(\theta\right)\left(r^{2}-R^{2}\right)}{R^{2}-2rR\cos\left(\theta-\varphi\right)+r^{2}}d\theta.$$