Chapitre 5. Résolution de Fourier des problèmes aux limites

La méthode de Fourier encore appelée méthode de séparation des variables est la méthode la plus utilisée pour la résolution des problèmes aux limites pour les équations de la physique mathématique.

XVI. DESCRIPTION DE LA MÉTHODE

Nous désignerons par $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ les variables spatiales et par t la variable temporelle. Soit G le domaine des variable spatiales et soit D le cylindre $S\times(0,\ +\infty)$ délimité par le plan Π d'équation $t=0$ et la surface latérale $S\times(0,\ +\infty)$ du cylindrique D. Considérons dans le cylindre D l'équation

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)u-\alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\beta(t)\frac{\partial u}{\partial t}-\gamma(t)u=f(x,t). \tag{64}$$

On supposera que chacune des quantités

$$A_{11},\quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{vmatrix},\ ...,\ \det(A_{ij})$$

est positive, ce qui revient à dire que la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ est définie positive. On supposera de plus que soit $\alpha(t)>0$ pour tout $t\geq 0$, soit $\alpha(t)\equiv 0$ et $\beta(t)>0$ pour tout $t\geq 0$. Sous ces conditions l'équation (64) est de type hyperbolique dans le cas où $\alpha(t)>0$ pour tout $t\geq 0$ et est de type parabolique dans le cas où $\alpha(t)\equiv 0$ et $\beta(t)>0$ pour tout $t\geq 0$.

Le problème aux limites pour l'équation (64) se formule de la façon suivante: trouver la fonction $u(x,t)$ vérifiant l'équation (64) pour $x\in D$, satisfaisant, dans le cas hyperbolique les conditions initiales

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in\overline{G} \tag{65}$$

et dans le cas parabolique la condition initiale

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\overline{G} \tag{66}$$

et les conditions aux frontières

$$\left.\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+b(x)u\right|_{x\in S,\ t\geq 0}=0. \tag{67}$$

La méthode de séparation des variables consiste à séparer les variables spatiales de la variable temporelle. Pour séparer les variables spatiales de la variable temporelle, on cherche une solution non identiquement nulle de l'équation homogène $(f(x,t)\equiv 0)$ associée à l'équation (64) vérifiant les conditions aux frontières (67) sous la forme

$$u(x,t)=X(x)T(t).$$

Insérons l'expression de $u(x,t)$ dans l'équation (64) et obtenons

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 X}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial X}{\partial x_i}+C(x)X\right]T-\left[\alpha(t)\frac{d^2T}{dt^2}+\beta(t)\frac{dT}{dt}+\gamma(t)T\right]X=0.$$

Séparons par la suite les variables:

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 X}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial X}{\partial x_i}+C(x)X}{X}=\frac{\alpha(t)\frac{d^2T}{dt^2}+\beta(t)\frac{dT}{dt}+\gamma(t)T}{T}.$$

A gauche de cette dernière égalité, on a une fonction de variables spatiales x et à droite, une fonction de variable temporelle t. L'égalité n'est alors possible que si chacun des membres est une constante. Désignons par λ la constante commune:

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 X}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial X}{\partial x_i}+C(x)X}{X}=\frac{\alpha(t)\frac{d^2T}{dt^2}+\beta(t)\frac{dT}{dt}+\gamma(t)T}{T}=-\lambda.$$

Cette double égalité nous donne

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial X}{\partial x_i} + (C(x)+\lambda)X = 0, \tag{68}$$

$$\alpha(t)\frac{d^2T}{dt^2} + \beta(t)\frac{dT}{dt} + (\gamma(t)+\lambda)T = 0. \tag{69}$$

Les conditions aux limites (67) nous donne

$$T(t)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial X}{\partial x_i} + b(x)X\right)_{x\in S,\ t\geq 0} = 0.$$

Puisque la fonction $T(t)$ est non identiquement nulle, cette dernière égalité a lieu que si

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial X}{\partial x_i} + b(x)X\right)_{x\in S} = 0. \tag{70}$$

On trouve ainsi que la fonction non identiquement nulle $X(x)$ doit être solution du problème aux limites (68),(70). Toute valeur de λ pour laquelle ce problème admet de solution non triviale est appelée valeur propre du problème et toute solution non triviale correspondente à une valeur propre est appelée fonction propre correspondente à la valeur propre λ. Le problème (68),(70) est par conséquent dénomé problème aux valeurs propres. L'ensemble de toutes les valeurs propres du problème aux valeurs propres est appelé *spectre* du problème aux valeurs propres. Le problème qui consiste à trouverle spectre et les fonctions propres correspondentes est appelé *problème spectral.*

En général, le spectre du problème (68),(70) est un ensemble dénombrable ordonné: $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ... < \lambda_n < ...$ et est telque $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$. Dans la suite, nous nous limiterons à ces cas.

La substence de la méthode de Fourier de résolution du problème aux limites (64)–(67) consiste en ce qui suit. On trouve le spectre $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$ du problème aux valeurs propres (68),(70) et le système des fonctions propres correspondent $\{X_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$. Par la suite, on cherche la solution de ce problème sous la forme d'une série de Fourier suivant le système des fonctions propres:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)X_n(x). \tag{71}$$

Par la suite, on décompose le terme libre $f(x)$ et la (ou les) fonction initiale $\varphi(x)$ (et $\psi(x)$) en séries de Fourier suivant le système des fonctions propres $\{X_n(x)\}$:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)X_n(x); \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n X_n(x); \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n X_n(x),$$

où

$$f_n(t) = \frac{\int_G f(x,t)X_n(x)\,dx}{\|X_n\|^2}, \quad \varphi_n = \frac{\int_G \varphi(x)X_n(x)\,dx}{\|X_n\|^2}, \quad \psi_n = \frac{\int_G \psi(x)X_n(x)\,dx}{\|X_n\|^2}.$$

Pour la détermination des coefficients de Fourier $T_n(t)$, on insert la série (71) dans l'équation (64), en admettant que cette série est deux fois terme à terme dérivable, ce qui conduira à l'équation

$$\alpha(t)\frac{d^2T_n}{dt^2} + \beta(t)\frac{dT_n}{dt} + (\gamma(t)+\lambda_n)T_n = 0 \tag{72}$$

Insérant par la suite la série (71) dans les conditions initiale (65) ou (66), on trouve, après avoir remplacé les fonctions initiales $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ par leur séries de Fourier respectives,

$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \tag{73}$$

dans le cas hyperbolique et

$$T_n(0) = \varphi_n. \tag{74}$$

dans le cas parabolique. On trouve ainsi que $T_n(t)$ sont solutions du problème de Cauchy (72),(73) dans le cas hyperbolique, et du problème de Cauchy (72),(74) dans le cas parabolique. O résoud le problème de Cauchy ainsi obtenu et on trouve les coefficients $T_n(t)$ qu'on inserera par la suite dans (71) pour avoir la solution du problème (64)–(67).

Remarque: Si les conditions aux limites (67) n'étaient pas homogènes, alors avant de passer à la résolution de Fourier du problème (64)–(67), l'on devait d'abord rendre ces conditions homogènes.

Remarque: La méthode de séparation des bariables s'applique aussi à la résolution des problèmes aux limites pour les équations de type elliptique.

XVII. EXEMPLES D'APPLICATION

.