CHAPITRE IV. Résolution du problème de Cauchy pour l' équation de la corde vibrante et l'équation de la chaleur

XIV. RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR L' ÉQUATION DE LA CORDE VIBRANTE

Définition: On appelle corde en physique, tout fil élastique qui ne resiste pas à la flixibilité.
Définition: On appelle équation de la corde vibrante ou encore équation d'onde unidimensionnel, une EDP de type hyperbolique de la forme

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{54}$$

où a est une constante positive.

On supposera que la corde est disposée suivant l'axe des x. Pour une corde de longueur l, on supposera que l'extrémité gauche se trouve au point d'abscisse $x=0$ et l'extrémité droite se trouve au point d'abscisse l; pour une corde de longueur infinie, on supposera que l'extrémité gauche se trouve à $-\infty$ et l'extrémité droite se trouve à $+\infty$; on parlera de la demi droite si l'extrémité gauche se trouve au point d'abscisse $x=0$ et l'extrémité droite se trouve à $+\infty$. Pour une corde disposée suivant l'axe des x, $u(x,t)$ donne la position du point d'abscisse x à l'instant t.

A l'absence des forces extérieures, l'équation (54) prend la forme

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} : \tag{55}$$

c'est l'équation des oscillations libre de la corde.

Le problème de Cauchy pour l'équation de la corde vibrante (54) xconsiste à trouver la fonction $u(x,t)$ de la classe $C^2(t>0) \cap C^1(t \geq 0)$ vérifiant l'équation (54) pour tout $t>0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ et sqtisfqisqnt les conditions initiales

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{56}$$

A. Résolution de D'Alembert du problème de Cauchy pour les oscillations libres de la corde

Si nous effectuons dans l'équation (55) la transformation $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, cette équation devient $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = \beta_1(\eta) \\ &\Leftrightarrow u(\xi,\eta) = \int \beta_1(\eta)\,d\eta + \alpha(\xi) \\ &\Leftrightarrow u(\xi,\eta) = \alpha(\xi) + \beta(\eta). \end{aligned}$$

En revenant aux variables initiale, on trouve alors que $u(x,t) = \alpha(x-at) + \beta(x+at)$: c'est la superposition d'une onde progressive (onde directe) $\alpha(x-at)$ et d'une onde retrograde (onde indirecte) $\beta(x+at)$ se propageant avec la même vitesse a.

Exploitons maintenant les conditions initiales (56) pour la détermination des fonctions α et β:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= u(x,0) = \alpha(x) + \beta(x) \\ \psi(x) &= u_t(x,0) = -a\alpha'(x) + a\beta'(x). \end{aligned}$$

On trouve alors le système

$$\begin{cases} \alpha(x) + \beta(x) = \varphi(x), \\ -\alpha(x) + \beta(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(y)\,dy + C, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(y)\,dy - C; \quad \beta(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(y)\,dy + C.$$

D'où

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \alpha(x-at)+\beta(x+at) \\ &= \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy, \end{aligned}$$

i.e.,

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy : \qquad (57)$$

c'est la solution de D'Alembert pour les oscillations libres de la corde. La formule (57) est dénomée *formule de D'Alembert pour les oscillations libres de la corde.*

B. Résolution de D'Alembert du problème de Cauchy pour les oscillations forcées de la corde

Pour la résolution de D'Alembert du problème de Cauchy pour les oscillations forcées de la corde, nous y associons le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x,t;\tau)}{\partial t^2} &= a^2 v(x,t;\tau), \quad -\infty<x<+\infty, \quad t-\tau>0, \\ v(x,\tau;\tau) &= 0, \quad v_t(x,\tau;\tau)=\frac{f(x,\tau)}{a^2}. \end{aligned}$$

La solution de ce dernier problème de Cauchy est donnée par la formule de D'Alembert:

$$v(x,t;\tau)=\frac{1}{2a}\frac{1}{a^2}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy.$$

Montrons que la fonction

$$U(x,t)=a^2\int_0^t v(x,t;\tau)\,d\tau$$

vérifie l'équation (54) et les conditions initiales homogènes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial}{\partial t}\left[v(x,t;t)+\int_0^t v_t(x,t;\tau)\,d\tau\right] \\ &= a^2\left[v_t(x,t;t)+\int_0^t v_{tt}(x,t;\tau)\,d\tau\right] \\ &= a^2\left[\frac{f(x,t)}{a^2}+\int_0^t a^2 v_{xx}(x,t;\tau)\,d\tau\right] \\ &= a^2\left[\frac{f(x,t)}{a^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}a^2\int_0^t v(x,t;\tau)\,d\tau\right] \\ &= a^2\left[\frac{f(x,t)}{a^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] \\ &= a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+f(x,t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(x,0) &= a^2\int_0^0 v(x,t;\tau)\,d\tau=0, \\ U_t(x,0) &= \left[a^2 v(x,t;t)+\int_0^t v_t(x,t;\tau)\,d\tau\right]_{t=0}=0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la superposition

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy \tag{58}$$

est la solution du problème de Cauchy (54)-(56). La formule (58) est appelée formule de D'Alembert pour les oscillations forcées de la corde ou encore formule généralisée de D'Alembert pour la corde vibrante.

C. Applications des formules de D'Alembert à la résolution des problèmes aux limites pour la demi droite

Les formules de D'Alembert s'appliquent facilement à la résolution des problèmes aux limites pour la demi droite. Avant de passer à un exemple, notons que si le terme libre $f(x,t)$ et les fonctions initiales $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont impaires, alors la formule de D'Alembert généralisée (58) donne

$$u(0,t) = \frac{\varphi(-at)+\varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy = 0,$$

ce qui permet d'appliquer facilement les formule de d'Alembert à la résolution du premier problème aux limites pour l'équation de la corde vibrante.

Si par contre $f(x,t)$ et les fonctions initiales $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont paires, alors la formule de D'Alembert généralisée (58) donne

$$u_x(0,t) = \frac{\varphi'(-at)+\varphi'(at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\psi(at)-\psi(-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_0^t \left(f(a(t-\tau),\tau) - f(-a(t-\tau),\tau)\right)d\tau = 0,$$

ce qui permet d'appliquer facilement les formule de d'Alembert à la résolution du deuxième problème aux limites pour l'équation de la corde vibrante.

Soit à résoudre par exemple le deuxième problème aux limites pour l'équation de la corde vibrante: Trouver la fonction $u(x,t)$ de la classe $C^2(t>0)\cap C^!(t\geq 0)$ vérifiant l'équation (54) quand $x>0$, les conditions initiale (56) et la condition à l'extrémité

$$u_x(0,t) = 0, \quad t\geq 0. \tag{59}$$

Pour résoudre le problème aux limites (54),(56),(59), nous lui associons le problème de Cauchy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \widetilde{f}(x,t), \quad t>0,\ -\in< x<+\infty,\\ u(x,0) &= \widetilde{\varphi}(x), \quad u_t(x,0) = \widetilde{\psi}(x), \quad x\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

où $\widetilde{f}(x,t)$, $\widetilde{\varphi}(x)$, et $\widetilde{\psi}(x)$ sont des fonctions paires dont les restrictions sur $x\in[0,+\infty)$ coincident avec $\widetilde{f}(x,t)$, $\widetilde{\varphi}(x)$, et $\widetilde{\psi}(x)$, respectivement. La solution de ce problème de Cauchy est donnée par la formule généralisée de D'Alembert:

$$w(x,t) = \frac{\widetilde{\varphi}(x-at)+\widetilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\widetilde{\psi}(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \widetilde{f}(y,\tau)\,dy.$$

Puisque $\widetilde{f}(x,t)$, $\widetilde{\varphi}(x)$, et $\widetilde{\psi}(x)$ sont des fonctions paires, on a $w_x(0,t)=0$, ce qui signifie que w satisfait la conditions à l'extrémité (59). Puisque $\widetilde{f}(x,t)$, $\widetilde{\varphi}(x)$, et $\widetilde{\psi}(x)$ coincident respectivement avec $f(x,t)$, $\varphi(x)$, et $\psi(x)$ sur $x\in[0,+\infty)$, on conclut que $w(x,t)$ satisfait l'équation (54) sur $x\in(0,+\infty)$, $t>0$ et vérifiet les conditions initiales (56). La solution du deuxième problème aux limites pour l'équation de la corde vibrante coincide alors avec la fonction w quand $x\geq 0$. Ecrivont cette solution: Si $x-at\geq 0$, i.e., $t\leq x/a$, alors

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy;$$

si par contre $x-at<0$, i.e., $t>x/a$, alors $x-a(t-\tau)=x-at+a\tau>0$ quand $\tau>t-x/a$ et $x-at+a\tau<0$ quand $\tau<t-x/a$. Par consequent,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\varphi(at-x)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{0}\widetilde{\psi}(y)\,dy+\int_{0}^{x+at}\widetilde{\psi}(y)\,dy\right] \\
&\quad +\frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\widetilde{f}(y,\tau)\,dy+\frac{1}{2a}\int_{t-x/a}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\widetilde{f}(y,\tau)\,dy \\
&= \frac{\varphi(at-x)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(y)\,dy+\frac{1}{2a}\int_{t-x/a}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy \\
&\quad +\frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_0^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0}\psi(-y)\,dy+\frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{0}f(-y,\tau)\,dy \\
&= \frac{\varphi(at-x)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(y)\,dy+\frac{1}{2a}\int_{t-x/a}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy \\
&\quad +\frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_0^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy-\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{0}\psi(z)\,dy-\frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_{a(t-\tau)-x}^{0}f(z,\tau)\,dy \\
&= \frac{\varphi(at-x)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(y)\,dy+\frac{1}{2a}\int_{t-x/a}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy \\
&\quad +\frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_0^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(z)\,dy+\frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_0^{a(t-\tau)-x}f(z,\tau)\,dy,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\varphi(at-x)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(y)\,dy+\frac{1}{2a}\int_{t-x/a}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy \\
&\quad +\frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_0^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(z)\,dy+\frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_0^{a(t-\tau)-x}f(z,\tau)\,dy.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy, \text{ si } t\le x/a, \\ \frac{\varphi(at-x)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(y)\,dy+\frac{1}{2a}\int_{t-x/a}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy \\ +\frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_0^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dy+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(z)\,dy+\frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a}d\tau\int_0^{a(t-\tau)-x}f(z,\tau)\,dy, \text{ si } t>x/a.\end{cases}$$

XV. RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR L' ÉQUATION DE LA CHALEUR

Définition:On appelle équation de la chaleur, une EDP de type parabolique de la forme

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{60}$$

où a est une constante positive.

L'équation (60) gouverne la distribution de la chaleur dans une barre homogène. On supposera la barre disposée le logn de l'axe des x de sorte que $u(x,t)$ désigne la température de la section d'abscisse x de la barre à l'instant t. Pour une barre de longueur finie l, on supposera que l'extrémité gauche de la barre se trrouve au point d'abscisse $x=0$ et l'extrémité droite de la barre se trouve au point d'abscisse $x=l$. Si la barre est de longueur infinie, on supposera l'extrémité gauche se trouve à $-\infty$, et l'extrémité droite à $+\infty$. On parlera de la demi droite si l'extrémité gauche se trouve au point d'abscisse $x=0$ et l'extrémité gauche à $+\infty$.

Si $\rho(x)$ désigne la densité linéique de la barre et si la densité des sources de la chaleur est $F(x,t)$, alors $f(x,t)=F(x,t)/\rho$. A l'absence des source de chaleur, l'équation (60) devient

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur consiste à trouver la fonction $u(x,t)$ de la classe $C^1(t>0)\cap C(t\geq 0)$ vérifiant l'équation (60) dans le domaine $t>0$, $-\infty<x<+\infty$ et satisfaisant la condition initiale

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad -\infty<x<+\infty. \tag{61}$$

A. Résolution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

Pour la résolution du problème de Cauchy ainsi formulé, on adoptera la méthode opérationnelle de Fourier, en se rappelant que la transformée de Fourier $\mathrm{F}\left[\exp\left(-\beta x^2\right)\right]=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\left(-\omega^2/4\beta\right)$, avec $\beta>0$. Si nous désignons par $U(\omega,t)=\mathrm{F}(u(x,t))$, $f(\omega,t)=\mathrm{F}(f(x,t))$, et $\Phi(\omega)=\mathrm{F}(\varphi(x))$, alors en appliquant l'opérateur de Fourier F sur les deux membres des égalités (60) et (61), on trouve U est solution du problème de Cauchy

$$\frac{dU}{dt}=-a^2\omega^2U+F(\omega,t), \quad U(\omega,0)=\Phi(\omega).$$

On cherche U par la méthode de variation de la constante: $U=C(t)\exp\left(-a^2\omega^2t\right)$. Alors

$$\begin{aligned}-a^2\omega^2U+F(\omega,t) &= C'(t)\exp\left(-a^2\omega^2t\right)-a^2\omega^2U \Leftrightarrow\\ C(t) &= \int_0^t F(\omega,\tau)\exp\left(a^2\omega^2\tau\right)d\tau+K(\omega).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}U &= C(t)\exp\left(-a^2\omega^2t\right)\\ &= \int_0^t F(\omega,\tau)\exp\left[-a^2\omega^2(t-\tau)\right]d\tau+K(\omega)\exp\left(-a^2\omega^2t\right).\end{aligned}$$

En utilisant la condition initiale sur U, on trouve

$$\Phi(\omega)=U(\omega,0)=K(\omega).$$

On trouve alors

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)\exp\left(-a^2\omega^2t\right)+\int_0^t F(\omega,\tau)\exp\left[-a^2\omega^2(t-\tau)\right]d\tau.$$

Puisque

$$\exp\left(-\omega^2/4\beta\right)=\mathrm{F}\left[\sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\exp\left(-\beta x^2\right)\right],$$

on peut écrire que

$$\exp\left(-a^2\omega^2t\right)=\mathrm{F}\left[\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)\right]$$

et

$$\exp\left[-a^2\omega^2(t-\tau)\right]=\mathrm{F}\left[\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right].$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(u(x,t)) &= U(\omega,t)=\Phi(\omega)\exp\left(-a^2\omega^2t\right)+\int_0^t F(\omega,\tau)\exp\left[-a^2\omega^2(t-\tau)\right]d\tau\\ &= \mathrm{F}(\varphi)\,\mathrm{F}\left[\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)\right]+\int_0^t \mathrm{F}(f(x,\tau))\,\mathrm{F}\left[\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right]d\tau\\ &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\mathrm{F}\left(\varphi*\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)\right)+\frac{1}{2a}\int_0^t\sqrt{\frac{1}{\pi(t-\tau)}}\mathrm{F}\left(f(x,\tau)*\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right)d\tau\\ &= \mathrm{F}\left(\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\left(\varphi*\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)\right)+\frac{1}{2a}\int_0^t\sqrt{\frac{1}{\pi(t-\tau)}}\left(f(x,\tau)*\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right)d\tau\right),\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\left(\varphi * \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)\right) + \frac{1}{2a}\int_0^t \sqrt{\frac{1}{\pi(t-\tau)}}\left(f(x,\tau) * \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right)d\tau \\ &= \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y,\tau) * \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)dy. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur est donnée par la formule

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)dy, \qquad (62)$$

appelée formule de Poisson généralisée pour l'équation de la chaleur sur la droite. A l'absence des sources de chaleur, cette formule prend la forme

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)dy$$

et est appelée formule de poisson pour l'équation de la chaleur sur la droite.

B. Application des formules de Poisson à la résolution des problèmes aux limite pour l'équation de la chaleur sur la demi droite

Les formules de Poisson sùappliquent très facilement à la résolution des problèmes aux limite pour l'équation de la chaleur sur la demi droite. Il faut avant tout noter que si la fonction initiale $\varphi(x)$ et le terme libre $f(x,t)$ sont impaires, alors la formule de Poisson généralisée donne $u(0,t)=0$. Si par contre $\varphi(x)$ et $f(x,t)$ sont des fonctions paires, alors la formule de Poisson géréralisée donnera $u_x(0,t)=0$.

Considérons à titre d'exemple, le premier problème aux limites. Ce problème consiste à trouver la fonction $u(x,t)$ de la classe $C^1(t>0)\cap C(t\geq 0)$ satisfaisant l'équation (60) sur $t>0$, $x>0$, la condition initiale $u(x,0)=\varphi(x)$, $x\geq 0$, et la condition à l'extrémité

$$u(0,t)=0, \quad t\geq 0. \qquad (63)$$

Pour la résolution de ce premier problème aux limite, nous lui associons le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} &= a^2\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \widetilde{f}(x,t), \quad t>0, \quad -\infty<x<+\infty, \\ w(x,0) &= \widetilde{\varphi}(x), \quad -\infty<x<+\infty, \end{aligned}$$

où $\widetilde{\varphi}(x)$ et $\widetilde{f}(x,t)$ sont deux fonctions impaires dont les restrictions sur $[0,+\infty)$ coincident avec $\varphi(x)$ et $f(x,t)$ respectivement. La solution de ce problème de Cauchy est donnée par la formule de Poisson généralisée:

$$w(x,t) = \frac{1}{2a}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\varphi}(y)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}\right)dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(y,\tau)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)dy.$$

Puisque $\widetilde{\varphi}(x)$ et $\widetilde{f}(x,t)$ sont deux fonctions impaires, on a $w(0,t)=0$, ce qui signifie que $z(x,t)$ vérifie la condition à l'extrémité (63). De même, $w(x,t)$ vérifie l'équation (60) sur $t>0$, $x>0$ et la condition initiale $w(x,0)=\varphi(x)$, $x\geq 0$, ce qui découle du fait que les resctrictions de $\widetilde{\varphi}(x)$ et $\widetilde{f}(x,t)$ sur $x\in[0,+\infty)$ coincident respectivement avec $\varphi(x)$ et $f(x,t)$. La solution du premier problème aux limite pour la demi droite coincide alors avec $w(x,t)$ quand

$x \geq 0,\ t \geq 0$. Ecrivons cette restriction:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \widetilde{\varphi}(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \frac{\widetilde{f}(y,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy \\
&+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \widetilde{\varphi}(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{0} \frac{\widetilde{f}(y,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy \\
&+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \varphi(-y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{0} \frac{f(-y,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy \\
&+ \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}\right) dy + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{\infty} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) dy \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(y) \left[\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}\right)\right] dy \\
&+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right] dy.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(y) \left[\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}\right)\right] dy \\
&+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right] dy.
\end{aligned}
$$