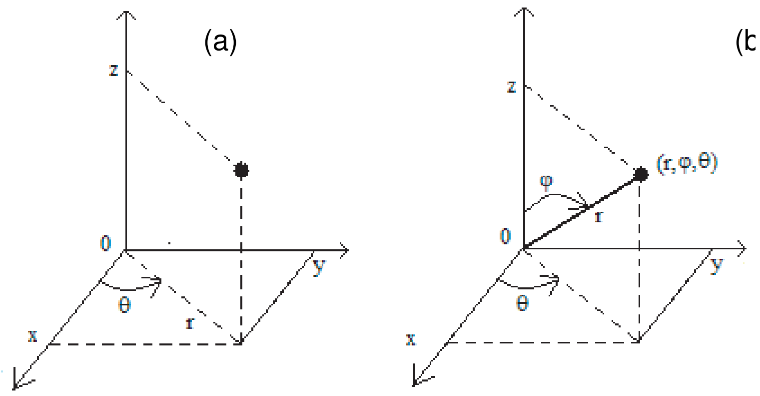

FIG. 6: Repéres spatiaux: (a) polaire cylindrique et (b) sphérique.

Chapitre III Formulation des problèmes aux limites pour les équations de la physique mathématique

X. LES PROBLÈMES

On décrit le domaine géométrique et les coordonnées spatiales naturelles (voir la figure)de chacun des types de problèmes d'évolution ou stationnaires étudiés dans cette partie du cours.

(a) Problèmes de vibrations ou d'ondes: la position est fonction du temps t.

Objet physique	coordonnées spatiales	temporelle
corde	cartésinne: x	t
membrane rectangulaire	cartésiene: (x, y)	t
membrane circulaire	polaires: (r, θ)	t

(b) Problèmes de diffusion ou de la chaleur: la température est fonction du temps t.

Objet physique	coordonnées spatiales	temporelle
tige	cartésinne: x	t
plaque rectangulaire	cartésinnes: (x, y)	t
tube rectangulaire	cartésinnes cylindriques: (x, y, z)	t
tube circulaire	polaires cylindriques: (r, θ, z)	t
sphère	sphèriques: (r, θ, φ)	t

(c) Problèmes stationnaires ou de potentiel: le potentiel est indépendant du temps t.

Objet physique	coordonnées spatiales
annequ	polaires: (r, θ)
tube circulaire	polaires cylindriques: (r, θ, z)
sphère creuse	sphèriques: (r, θ, φ)
température entre 2 plaques parallèles	cartésiennes: (x, y, z)
température entre 2 cylindres coaxiaux	polaires cylindriques: (r, θ, z)
température entre 2 sphères concentriques	sphèriques: (r, θ, φ)

XI. LES MODÈLES MATHÉMATIQUES

On étudiera les trois types de problèmes au moyen de leurs modèles mathématiques qui sont les équations aux dérivées partielles suivantes.

(a) L'équation des ondes pour $u\,(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u\,(x,t) = f\,(x,t)\,, \qquad \Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}; \tag{44}$$

(b) L'équation de la chaleur pour $u\,(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \Delta u\,(x,t) = f\,(x,t)\,, \qquad \Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}; \tag{45}$$

(c) L'équation des phénomènes stationnaires pour $u\,(x)$:

$$\Delta u\,(x) = -f\,(x)\,. \tag{46}$$

Les équations (44)–(45) sont appelées équations fondamentales de la physique mathématique. Avant de proceder à l'analyse de ces équations, nous donnons d'abord les définitions fondamentales rencontées dans les équations aux dérivées partielles (EDP), et par la suite, nous indiquons dans quelle classe d'équations appartient chacune de ces trois équations.

XII. CLASSIFICATIONS DES EDP QUASILINÉAIRES DU SECOND ORDRE

Définition: On appelle équation aux dérivées partielles, une équation qui établie un lien entre les variables indépendentes $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, la fonction inconnue $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, et ses dérivées partielles d'au moins du premier ordre:

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \mathbf{grad}\ u, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} ... \partial x_n^{m_n}}\right) = 0, \tag{47}$$

$m_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sum_{j=1}^{n} m_j = m$, $m \geq 1$.

Définition: On entend par ordre de l'équation (47) le plus grand ordre des dérivées partielles de l'inconnue u contenue dans cette équation.

Définition: On appelle solution de l'équation (47) définie sur un ensemble $G \subseteq \mathbb{R}^n$, toute fonction $\varphi(x)$ possedant toutes les dérivées partielles figurant dans (47) et qui satisfait cette équation (47):

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \varphi(x), \mathbf{grad}\ \varphi(x), ..., \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j}, ..., \frac{\partial^m \varphi(x)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} ... \partial x_n^{m_n}}\right) = 0, \quad \forall x \in G.$$

Définition: On appelle EDP quasilinéaire d'ordre m, une EDP d'ordrer m linéaire par rapport à toutes les dérivées partielles d'ordre m.

Définition: On appelle EDP quasilinéaire du second ordre à n variables, une EDP de la forme

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x, u, \mathbf{grad}\ u) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + f(x, u, \mathbf{grad}\ u) = 0.$$

Définition: On appelle EDP linéaire une EDP linéaire par rapport à l'inconnue et toutes les dérivées partielles que contient ladite équation.

Exemple: Les EDP linéaire du second ordre d'ordre n sont les EDP de la forme

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} B_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + Cu(x) + f(x) = 0.$$

Rm: Notons que toute EDP linéaire est une EDP quasilinéaire.

Dans tout ce qui suit, on se limitera aux EDPs quasilinéaires dans lesquelles les coefficients A_{ij} dépendent seulement de x et tels que $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + f(x, u, \mathbf{grad}\ u) = 0, \qquad A_{ij}(x) = A_{ji}(x). \tag{48}$$

pour les EDPs quasilinéaire du second ordre (48), la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) & ... & A_{1n}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) & ... & A_{2n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1}(x) & A_{n2}(x) & ... & A_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

appelée matrice des coefficients d'ordre superieur est une matrice symetrique. Cette matrice joue un rôle très important dans la classification des EDPs quasiliéaires du second ordre.

Soit x un point du domaine de définition de l'équation (48). Puisque $A(x)$ est une matrice symétrique, toutes ses vqleurs propres sont toutes réelles.

Définition: On dira que l'équation (48) au point x est de type (α, β, γ) si la matrice $A(x)$ au point x admet α valeurs propres positives, β valeurs propres négatives, det γ valeurs propres nulles.

Définition: On dira que l'équation (48) est de type **elliptique** au point x si en ce point elle est de type $(n, 0, 0)$ ou de type $(0, n, 0)$.

Définition: On dira que l'équation (48) est de type **hyperbolique** au point x si en ce point elle est de type $(n-1, 1, 0)$ ou de type $(1, n-1, 0)$.

Définition: On dira que l'équation (48) est de type **parabolique** au point x si en ce point elle est de type $(n-1, 0, 1)$ ou de type $(0, n-1, 1)$.

A. Cas des EDPs du secord ordre à 2 variables

Définition: On appelle EDP quasilinéaire du second ordre à deux variables, une EDP quasilinéaire de la forme

$$a_{11}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{49}$$

Si nous désignons par $\lambda_1(x,y)$ et $\lambda_2(x,y)$ les valeurs propres de la matrice d'ordre supérieur de l'EDP (49), alors on aura $\lambda_1(x,y)$ et $\lambda_2(x,y)$ seront les racines de l'équation du second degré $\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, de sorte que $\lambda_1(x,y) \times \lambda_2(x,y) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Ainsi, l'EDP (49) sera de type elliptique ssi $\delta' = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, de type hyperbolique ssi $\delta' = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, et de type parabolique ssi $\delta' = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

XIII. FORMULATION DES PROBLÈMES AUX LIMITES POUR LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Considérons les équations fondamentales de la physique mathématique sous la forme générale

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div\,(p\,\mathbf{grad}\ u) - qu + F(x,t)\,, \tag{50}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = div\,(p\,\mathbf{grad}\ u) - qu + F(x,t)\,, \tag{51}$$

$$-div\,(p\,\mathbf{grad}\ u) + qu = F(x) \tag{52}$$

décrivant respectivement les processus oscillatoires, les processus de la diffusion, et les processus stationaires.

Soit G un domaine de $\mathbb{R}^n$, domaine dans lequel le processus se produit et soit S la frontière de ce domaine. On suppose que S est suffisament lisse par morceau. G est le domaine de variation de x : c'est le domaine de définition de l'équation (52). En qualité du domaine de définition des équations (50) et (51), on considère le cylindre $C_T = G\times(0,\ T)$ de hauteur $T \in (0,\ +\infty]$. Sa frontière est $\partial C_T = S \times [0,\ T]$ si T est fini, et $\partial C_T = S \times [0, +\infty)$ si $T = +\infty$.

Les coefficients ρ, p et q sont supposés indépendents du temps t. Pour donner aux équations ci-dessus un sens physique, on supposera que $\rho(x)\,,\, p(x) > 0$ et $q(x) \geq 0$ quand x parcourt G. Pour leur donner un sens mathématique, on suppose que $\rho(x)\,, q(x) \in C\left(\overline{G}\right)$ et $p \in C^1\left(\overline{G}\right)$. sous ces conditions, les équations (50), (51), et (52) sont respectivement de type hyperbolique, parabolique et elliptique.

Pour une description complète de tel ou tel processus, il faut, en plus de l'équation décrivant ledit processus, connaitre l'état initial du processus (conditions initiales) et le regime sur la frontiére du milieu dans lequel le processus se produit (conditions aux frontiéres), ceci étant lié mathématiquement à la non unicité des solutions des équations différentielles. Les conditions intiales ensemble avec les conditions aux frontiéres constituent les conditions aux limites. Les problème correspondent est appelé problème de Cauchy si les conditions aux frontiéres sont absentes et problème aux limites si les conditions aux frontiéres sont présentes.

A. Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy se formule seulement pour les processus non stationnaires (processus oscillatoires et processus de la diffusion). Ici les conditions aux frontiéres sont absentes et le milieu G où se produit le processus coincide avec l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Pour les phénomène oscillatoire (resp. de la diffusion), le problème de Cauchy consiste à déterminer la fonction $u(x,t)$ de la classe $C^2(t>0) \cap C^1(T \geq 0)$ (resp. de la classe $C^1(t>0) \cap C(t \geq 0)$) satisfaisant l'équation (50) (resp. 51) pour $t > 0$ et les conditions initiales

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \quad u_t(x,0) = \psi(x)\,, \quad x \in G = \mathbb{R}^n$$

(resp.

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \quad x \in G = \mathbb{R}^n).$$

B. Problème aux limites pour les équations des processus stationnaires

Pour les processus stationnaires, les conditions initiales sont absentes et le milieu G dans lequel le processus se produit est différent de l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Le problème aux limites pour les processus stationnaires consiste à trouver la fonction $u(x)$ qui vérifie dans G l'équation (52) et satisfaisant sur la frontière S les conditions aux frontières de la forme

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_S = u_0, \tag{53}$$

$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ étant la dérivée de u suivant la normale extérieure $\mathbf{n}$ à la surface S, α, β, et u_0 étant trois fonctions continue sur S et telles que $\alpha(x) \geq 0$, $\beta(x) \geq 0$, $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ sur S.

Les conditions aux frontieres (53) sont dites

(1) de première espèce si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$;

(2) de deuxième espèce si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$;

(3) de troisième espèce si $\beta = 1$, $\alpha(x) \geq 0$ et $\alpha(x)$ non identiquement nul.

C. Problèmes aux limites mixtes

Les problèmes aux limites mixtes se formulent pour les processus oscillatoires et les processus de la diffusion. Ici, le milieu dans lequel le processus s'observe est différent de l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier, les condirions initiales et les conditions aux frontiéres sont données.

Le problème aux limites mixtes pour les processus oecillatoires (resp. de la diffusion) se formule comme suit: trouver la fonction $u(x,t)$ de la classe $C^2(t > 0) \cap C^1(T \geq 0)$ (resp. de la classe $C^1(t > 0) \cap C(t \geq 0)$) satisfaisant l'équation (50) (resp. 51) pour $t > 0$, les conditions initiales

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in G = \mathbb{R}^n$$

(resp. la condition initiale

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in G = \mathbb{R}^n),$$

et les conditions aux frontiéres (53) (dans ce cas, $u_0 = u_0(x,t)$, $\alpha = \alpha(x,t)$, et $\beta = \beta(x,t)$).

Définition: Les conditions aux frontières (53) sont dites homogènes si $u_0(x) \equiv 0$ sur S.

Pour résoudre un problème aux limites, il faut avant tout rendre les conditions aux frontières homogènes. Pour cela, on se propose de chercher la solution du problème sous la forme $u = v + w$, où v est la nouvelle inconnue et w une fonction à choisir de sorte que les conditions aux frontières sur v soient homogènes:

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_S = 0,$$

ce qui impose les conditions $\alpha w + \beta \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\big|_S = u_0$ sur w. Quand on replace u dans l'équation du processus par son expression, on trouve l'équation qui définit v. De même, pour trouver les conditions sur v, on remplace u par son expression dans les conditions initiales et!ou les conditions aux frontières.