Chapitre II. Transformation de Laplace

III. DÉFINITION ET EXEMPLES

Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[0,+\infty[$. La transformée de Laplace $F(s)$ de la fonction $f(x)$ est définie par

$$L(f)(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt, \tag{25}$$

sous condition que l'intégrale existe pour tout $s > \gamma$. Dans ce cas on dit que $f(x)$ est transformable et qu'elle est l'*origine* de $F(s)$ et $F(s)$ est l'image (de Laplace) de $f(x)$. Le nombre γ est dans ce cas appelé indicateur de croissance de l'originale $f(x)$. L est appelé opérateur de Laplace.

Le passage de l'originale $f(x)$ à son image $F(s)$ est appelé transformation de Laplace.

Exemple. Trouver l'image de $f(x) = 1$.

Résol. Par définition,

$$\begin{aligned} L(1)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= -\left[\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^{+\infty} \\ & \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$L(1) = \frac{1}{s}.$$

Exemple. Trouver l'image $F(s)$ de $f(x) = e^{ax}$, $a < 0$.

Résol. Par définition,

$$\begin{aligned} L(e^{ax})(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt \\ &= \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s-a}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$L(e^{ax})(s) = \frac{1}{s-a}.$$

Il découle de la linéarité de l'intégrale que L est un opérateur linéaire:

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g),$$

sous la condition que f et g sont transformables et ont un même indicateur de croissance.

Exemple: Trouver l'image de $f(x) = \cosh ax$.

Résol. Si nous écrivons $f(x) = \cosh ax = \frac{1}{2} e^{ax} + \frac{1}{2} e^{-ax}$, nous pouvons appliquer la linéarité de l'opérateur de Laplace, e qui donne

$$\begin{aligned} L(\cosh ax)(s) &= L\left(\frac{1}{2} e^{ax} + \frac{1}{2} e^{-ax}\right) \\ &= \frac{1}{2} L(e^{ax}) + \frac{1}{2} L\left(e^{-ax}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2}, \end{aligned}$$

i.e.

$$L(\cosh ax)(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$

Exemple: Trouver l'image de $f(x) = \sin ax$.
Résol. En écrivant $f(x) = \sinh ax = \frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-at}$, on applique la linéarité de L, ce qui donne:

$$\begin{aligned} L(\sinh ax) &= L\left(\frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-at}\right) \\ &= \frac{1}{2}L(e^{ax}) - \frac{1}{2}L\left(e^{-at}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$L(\sinh ax)(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}.$$

Exemple. Trouver l'image de $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.
Résol.

$$\begin{aligned} L(x^n) &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt \\ &= \begin{bmatrix} u = t^n & v' = e^{-st} \\ u' = nt^{n-1} & v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{bmatrix} \\ &= \left[-\frac{1}{s}t^n e^{-st}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} nt^{n-1}\frac{1}{s}e^{-st} dt \\ &= \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-st} dt \\ &= \frac{n}{s}L\left(x^{n-1}\right). \end{aligned}$$

On trouve ainsi que

$$L(x^n) = \frac{n}{s}L\left(x^{n-1}\right).$$

Par itération, on trouve

$$L(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

Exemple: Trouver l'image de $f(x) = \sin \omega x$ et $f(x) = \cos \omega x$.
Résol. Sachant que $e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x$ et que

$$\begin{aligned} L\left(e^{i\omega x}\right) &= \frac{1}{s - i\omega} \\ &= \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2} &= L\left(e^{i\omega x}\right) = L(\cos \omega x + i \sin \omega x) \\ &= L(\cos \omega x) + iL(\sin \omega x), \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} L(\cos\omega x) &= \frac{s}{s^2+\omega^2}, \\ L(\sin\omega x) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Définition. On dit que la fonction $f(x)$ est de type exponentiel d'ordre γ s'il existe des constantes $\gamma, M > 0$, et $T > 0$ telles que

$$|f(x)| \leq M e^{\gamma x}, \quad \forall x > T. \tag{26}$$

On appelle abscisse de convergence de $f(x)$ la borne inférieure $\gamma_0 \leq \gamma$ telle que (26) soit satisfaite.

Proposition. Soit $f(x)$ une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. Si γ_0 est l'abscisse de convergence de $f(x)$, alors l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

est absolument et uniformément convergente sur $s > \gamma_0$.

IV. TRANSFORMÉES DE DÉRIVÉES ET D'INTÉGRALES

En vue des applications aux équations différentielles, il faut savoir transformer la dérivée d'une fonction.

Supposons que $f(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre k sont deux fonctions transformables et trouvons l'image de $f^{(k)}(x)$:

$$\begin{aligned} L\left(f^{(k)}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f^{(k)}(t)\, dt \\ &= \begin{bmatrix} u = e^{-st} & v' = f^{(k)} \\ u' = -se^{-st} & v = f^{(k-1)} \end{bmatrix} \\ &= \left[f^{(k-1)}(t)\, e^{-st}\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f^{(k-1)}(t)\, e^{-st} dt \\ &= -f^{(k-1)}(0) + sL\left(f^{(k-1)}\right), \end{aligned}$$

i.e.,

$$L\left(f^{(k)}\right) = sL\left(f^{(k-1)}\right) - f^{(k-1)}(0).$$

Par itération, on obtient

$$\begin{aligned} L\left(f^{(k)}\right) &= sL\left(f^{(k-1)}\right) - f^{(k-1)}(0) \\ L\left(f^{(k-1)}\right) &= sL\left(f^{(k-2)}\right) - f^{(k-2)}(0) \\ L\left(f^{(k-2)}\right) &= sL\left(f^{(k-3)}\right) - f^{(k-3)}(0) \\ .... &= .... \\ L(f') &= sL(f) - f(0). \end{aligned}$$

Ceci donne

$$L\left(f^{(k)}\right) = s^k L(f) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - s^{k-3} f''(0) - ... - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0),$$

i.e.,

$$L\left(f^{(k)}\right) = s^k L(f) - \sum_{l=1}^{k} s^{k-l} f^{(l-1)}(0). \tag{27}$$

La formule (27) s'applique à la résolution du problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires linéaires à coéfficients constants.

Soit donné le problème de Cauchy

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x) = f(x), \tag{28}$$

$$y^{(l)}(0) = y_l, \quad l = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1. \tag{29}$$

Supposons que la solution de ce problème, ainsi que le terme libre $f(x)$ sont transformables et soit $Y(s) = L(y)$ et $F(s) = L(f)$. Appliquons l'opèrateur de Laplace sur les deux membres de (29) et utilisons sa linèarité et la formule (28):

$$\begin{aligned} L(f) &= L\left(\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}\right) \Leftrightarrow \\ F &= \sum_{k=0}^{n} a_k L\left(y^{(k)}\right) \\ &= a_0 L(y) + \sum_{k=1}^{n} a_k L\left(y^{(k)}\right) \\ &= a_0 L(y) + \sum_{k=1}^{n} a_k \left[s^k L(y) - \sum_{l=1}^{k} s^{k-l} y^{(l-1)}(0)\right] \\ &= a_0 L(y) + \sum_{k=1}^{n} a_k s^k L(y) - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{k} s^{k-l} y^{(l-1)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k s^k Y - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} a_k s^{k-l} y_{l-1}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k s^k Y &= F + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} a_k s^{k-l} y_{l-1} \\ &\Leftrightarrow \\ Y &= \frac{F + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} a_k s^{k-l} y_{l-1}}{P(s)}, \end{aligned}$$

$P(s)$ etant le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée à (28). On trouve ainsi la transformée de Laplace de la solution $y(x)$ du problème (28)–(29):

$$Y(s) = \frac{F(s) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} a_k s^{k-l} y_{l-1}}{P(s)}.$$

Si on connais une fonction qu admet $Y(s)$ comme transformée de Laplace, alors cette fonction est la solution (28)–(29). Généralement, la recherche de l'originale à partir de son image se fait suivant une table appelée *table des images et des originaux*.

De la meme façon, on résoud le problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire:

Exemple. Résoudre le problème de Cauchy

$$y'' + 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 3,\ y\prime(0) = 1.$$

Résol.

$$\begin{aligned}
L\left(y''+4y'+3y\right) &= L\left(0\right) \\
&\Leftrightarrow \\
0 &= L\left(y''\right)+4L\left(y'\right)+3L\left(y\right) \\
&= s^2L\left(y\right)-sy\left(0\right)-y'\left(0\right)+4\left[sL\left(y\right)-y\left(0\right)\right]+3L\left(y\right) \\
&= \left[s^2+4s+3\right]L\left(y\right)+\left[-sy\left(0\right)-y'\left(0\right)-4y\left(0\right)\right] \\
&= \left[s^2+4s+3\right]L\left(y\right)-\left[3s+13\right] \\
&\Leftrightarrow \\
L\left(y\right) &= \frac{3s+13}{s^2+4s+3}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
L\left(y\right) &= \frac{3s+13}{s^2+4s+3} \\
&= \frac{5}{s+1}-\frac{2}{s+3} \\
&= 5L\left(e^{-x}\right)-2L\left(e^{-3x}\right) \\
&= L\left(5e^{-x}-2e^{-3x}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$y\left(x\right)=5e^{-x}-2e^{-3x}.$$

Trouvons maintenant la transformée de l'intégrale: Soit $f\left(x\right)$ une fonction transformable pour $s\geq\gamma$. Proposons nous de trouver l'image de $g\left(x\right)=\int_0^x f\left(\tau\right)d\tau$. Puisque $g'\left(x\right)=f\left(x\right)$, on a

$$\begin{aligned}
L\left(f\right) &= L\left(g'\right) \\
&= sL\left(g\right)-g\left(0\right) \\
&= sL\left(g\right),
\end{aligned}$$

car $g\left(0\right)=0$. On trouve alors

$$L\left(\int_0^x f\left(\tau\right)d\tau\right)=\frac{1}{s}L\left(f\right).$$

Exemple. Trouver l'origine $f\left(x\right)$ si son image est

$$L\left(f\right)=\frac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)}.$$

Résol. Ici, on a

$$\begin{aligned}
L\left(f\right) &= \frac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)} \\
&= \frac{1}{s\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{1}{\omega}\frac{1}{s}L\left(\sin\omega t\right) \\
&= \frac{1}{\omega}L\left(\int_0^x \sin\omega\tau d\tau\right) \\
&= L\left(\frac{1}{\omega}\int_0^x \sin\omega\tau d\tau\right)
\end{aligned}$$

i.e.,

$$L\left(f\right)=L\left(\frac{1}{\omega}\int_0^x \sin\omega\tau d\tau\right),$$

ou encore,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\omega}\int_0^x \sin\omega\tau d\tau \\ &= \frac{1}{\omega}\left[-\frac{\cos\omega\tau}{\omega}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{\omega^2}\left[1-\cos\omega x\right]. \end{aligned}$$

ainsi,

$$f(x) = \frac{1-\cos\omega x}{\omega^2}.$$

V. DÉPLACEMENTS EN s ET EN x

Dans la pratique, on a besoin de l'originale de $F(s-a)$ et de la transformée de $u(x-a)f(x-a)$ où $u(x)$ est la fonction d'Heaviside,

$$u(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ 1, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Soit $f(x)$ une fonction transformable. Trouvons $L(e^{ax}f(x))$:

$$\begin{aligned} L(e^{ax}f(x))(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt \\ &= L(f)(s-a). \end{aligned}$$

Ainsi, si $F(s) = L(f)(s)$, alors

$$L(e^{ax}f(x)) = F(s-a). \tag{30}$$

Exemple. Appliquer la formule ci-dessus sur les trois fonctions x^n, $\cos\omega x$, et $\sin\omega x$, puis présenter le résultat sous forme du tableau.

Résol. Nous avons déjà eu à calculer $L(\cos\omega x)$, $L(\sin\omega x)$ et $L(x^n)$ et avons obtenu

$$L(\cos\omega x) = \frac{s}{s^2+\omega^2};\ L(\sin\omega x) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2};\ \text{et } L(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

On aura alors, compte tenue de la formule (30),

$f(x)$	$F(s)$	$e^{ax}f(x)$	$F(s-a)$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{ax}x^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\cos\omega x$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$e^{ax}\cos\omega x$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\sin\omega x$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$e^{ax}\omega\sin\omega x$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Exemple: Utiliser le tableau de l'exemple précedent pour résoudre le problème de Cauchy

$$y'' + 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -4,$$

au moyen de la transformée de Laplace.

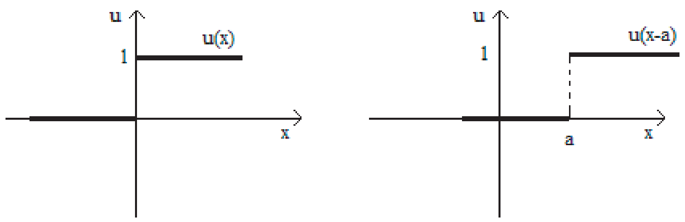

FIG. 3: La fonction d'Heaviside $u(x)$ et sa translatée $u(x-a)$, $a > 0$.

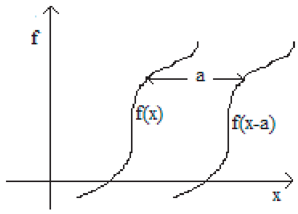

FIG. 4: Déplacement $f(x-a)$ de $f(x)$, $a > 0$

Résol.

$$\begin{aligned} L(y''+2y'+5y) &= L(0) \\ &\Leftrightarrow \\ L(y'')+2L(y')+5L(y) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ s^2L(y)-sy(0)-y'(0)+2sL(y)-2y(0)+5L(y) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ L(y) &= \frac{sy(0)+y'(0)+2y(0)}{s^2+2s+5} \\ &= \frac{2s}{s^2+2s+5}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} L(y) &= \frac{2s}{s^2+2s+5} \\ &= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} - \frac{2}{(s+1)^2+4}. \end{aligned}$$

La tableau ci-dessus montre que

$$L(y) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} - \frac{2}{(s+1)^2+4} = L\left(2e^{-x}\cos 2x\right) - L\left(e^{-x}\sin 2x\right).$$

On trouve alors

$$y(x) = e^{-x}(2\cos 2x - \sin 2x).$$

Définition: On appelle translatée $u_a(x) = u(x-a)$ de la fonction d'Heaviside $u(x)$, la fonction

$$u(x-a) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ 1, & \text{si } x > a, \end{cases} \qquad a \geq 0. \tag{31}$$

Soit $f(x)$ une fonction transformable. Trouvons l'image de $u(x-a)\,f(x-a)\,,\ \ a \geq 0:$

$$\begin{aligned}
L(u(x-a)\,f(x-a))(s) &= \int_0^{+\infty} u(t-a)\,f(t-a)\,e^{-st}dt \\
&= \int_{-a}^{+\infty} u(y)\,f(y)\,e^{-s(y+a)}dy \\
&= e^{-sa}\int_0^{+\infty} u(y)\,f(y)\,e^{-sy}dy \\
&= e^{-sa}\int_0^{+\infty} f(y)\,e^{-sy}dy \\
&= e^{-as}L(f)\,,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$L(u(x-a)\,f(x-a))(s) = e^{-as}L(f)(s)\,.$$

Ainsi, si f est transformable et si $F(s) = L(f)(s)\,,$ alors

$$L(u(x-a)\,f(x-a))(s) = e^{-as}F(s)\,, \tag{32}$$

ou encore, par changement de variable en f,

$$L(u(x-a)\,f(x))(s) = e^{-as}L(f(x+a))(s)\,. \tag{33}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
L(u(x-a)\,f(x))(s) &= \int_0^{+\infty} u(t-a)\,f(t)\,e^{-st}dt \\
&= \int_{-a}^{+\infty} u(y)\,f(y+a)\,e^{-s(y+a)}dy \\
&= e^{-sa}\int_0^{+\infty} u(y)\,f(y+a)\,e^{-sy}dy \\
&= e^{-sa}\int_0^{+\infty} f(y+a)\,e^{-sy}dy \\
&= e^{-as}L(f(x+a))\,.
\end{aligned}$$

On voit que

$$L(u(x-a)) = \frac{e^{-as}}{s}. \tag{34}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
L(u(x-a)) &= \int_0^{+\infty} u(t-a)\,e^{-st}dt \\
&= \int_{-a}^{+\infty} u(y)\,e^{-s(y+a)}dy \\
&= e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-sy}dy \\
&= e^{-as}L(1) \\
&= \frac{e^{-as}}{s}.
\end{aligned}$$

Exemple: Trouver $L(f)\,,$ si

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ si } 0 < x < \pi \\ 0, \text{ si } \pi < x < 2\pi \\ \sin x, \text{ si } x > 2\pi. \end{cases}$$

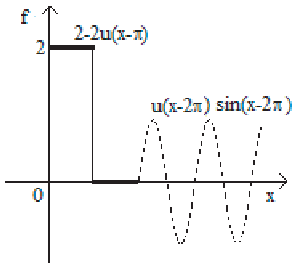

FIG. 5: Graphique de $f(x)$

Résol.

$$\begin{aligned}
L(f)(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}dt \\
&= \int_0^{\pi} 2e^{-st}dt + \int_{2\pi}^{+\infty} e^{-st}\sin t\ dt \\
&= \int_0^{+\infty} (2-2u(t-\pi))\, e^{-st}dt + \int_0^{+\infty} u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)\, dt \\
&= L(2-2u(t-\pi)) + L(u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)) \\
&= L(2) - 2L(u(t-\pi)) + L(u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)) \\
&= \frac{2}{s} - \frac{2e^{-\pi s}}{s} + e^{-2\pi s}L(\sin(x-2\pi)) \\
&= \frac{2}{s} - \frac{2e^{-\pi s}}{s} + e^{-2\pi s}L(\sin(x)) \\
&= \frac{2(1-e^{-\pi s})}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$L(f)(s) = \frac{2(1-e^{-\pi s})}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}.$$

On pouvait aussi reécrire $f(x)$ comme

$$f(x) = 2 - 2u(x-\pi) + u(x-2\pi)\sin(x-2\pi),$$

puis, appliquer la linéarité de L :

$$L(f) = 2L(1) - 2L[u(x-\pi)] + L[u(x-2\pi)\sin(x-2\pi)],$$

et utiliser par la suite les formules (32), (33) et (34).

Exemple: Résoudre au moyen de la transformation de Laplace le problème de Cauchy

$$\begin{aligned}
y'' + 4y &= g(x) = \begin{cases} x, \text{ si } 0 \le x < \pi/2 \\ \pi/2, \text{ si } x > \pi/2 \end{cases}, \\
y(0) &= y'(0) = 0.
\end{aligned}$$

Résol. ecrivons d'abord $g(x)$ au moyen de la fonction d'Heaviside:

$$g(x) = \frac{\pi}{2}u(x-\pi/2) + x - xu(x-\pi/2).$$

Une application de la transformation de Laplace donne

$$\begin{aligned}
L(y'') + 4L(y) &= L(g) \\
&= \frac{\pi}{2} L[u(x-\pi/2)] + L(x) - L[xu(x-\pi/2)] \\
&\Leftrightarrow \\
(s^2+4)\, L(y) &= \frac{\pi}{2} L[u(x-\pi/2)] + L(x) - L[xu(x-\pi/2)] \\
&= \frac{\pi}{2} L[u(x-\pi/2)] + L(x) - e^{-\frac{\pi}{2}s} L[x+\pi/2] \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} + \frac{1}{s^2} - e^{-\frac{\pi}{2}s}[L(x) + \pi/2 L(1)] \\
&= \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}s}}{2s} - \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}s}}{2s} + \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2} \\
&= \frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2},
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
L(y) &= \frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2(s^2+4)} \\
&= \frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}s}}{4s^2} - \frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}s}}{4(s^2+4)} \\
&= \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4(s^2+4)} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{4s^2} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{4(s^2+4)} \\
&= L\left(\frac{x}{4}\right) - L\left(\frac{\sin 2x}{8}\right) - e^{-\frac{\pi}{2}s} L\left(\frac{x}{4}\right) + e^{-\frac{\pi}{2}s} L\left(\frac{\sin 2x}{8}\right) \\
&= L\left(\frac{2x - \sin 2x}{8}\right) - L\left[u\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{2x-\pi}{8}\right] + L\left[u\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(2x-\pi)}{8}\right] \\
&= L\left(\frac{2x - \sin 2x}{8} - u\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{2x-\pi}{8} + u\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(2x-\pi)}{8}\right),
\end{aligned}$$

ce qui donne, compte tenue des formule (33),

$$y(x) = \frac{1}{8}\left[2x - \sin 2x - (2x-\pi)\ u\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \sin 2x\ u\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

VI. LA "FONCTION" DELTA DE DIRAC

Soit la fonction

$$f_k(x;a) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{si } a \leq x < a+k \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{35}$$

On voit que l'intégrale de $f_k(x;a)$ est 1 :

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x;a)\, dx = \int_a^{a+k} \frac{dx}{k} = \left[\frac{x}{k}\right]_a^{a+k} = 1. \tag{36}$$

On note $\delta(x-a)$ la limite de $f_k(x;a)$ quand $k \to 0$. Cette limite s'appelle "*fonction delta de Dirac*", ou plus précisément, masse ou mesure de Dirac.

On peut présenter $f_k(x;a)$ au moyen de la différence de deux fonctions d'Heaviside:

$$f_k(x;a) = \frac{1}{k}[u(x-a) - u(x-(a+k))].$$

De (34) on obtient alors

$$L(f_k(x;a)) = \frac{1}{k}\left[\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-(a+k)s}}{s}\right],$$

i.e.,

$$L\left(f_k\left(x;a\right)\right)=e^{-as}\frac{1-e^{-ks}}{sk}. \tag{37}$$

Si nous passons à la limite dans (37), alors nous obtenons

$$L\left(\delta\left(x-a\right)\right)=e^{-as}. \tag{38}$$

Exemple. Résoudre le problème de Cauchy

$$y''+3y'+2y=\delta(t-a),\quad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

au moyen de la transformation de Laplace.

Résol. On a

$$\begin{aligned}
L\left(y''+3y'+2y\right) &= L\left(\delta(t-a)\right)\Leftrightarrow\\
L\left(y''+3y'+2y\right) &= e^{-as}\\
s^2L\left(y\right)+3sL\left(y\right)+2L\left(y\right) &= e^{-as}\Leftrightarrow\\
L\left(y\right) &= \frac{e^{-as}}{s^2+3s+2}\\
&= \frac{e^{-as}}{s+1}-\frac{e^{-as}}{s+2}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$L\left(e^{ax}\right)=\frac{1}{s-a},$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}
L\left(y\right) &= \frac{e^{-as}}{s+1}-\frac{e^{-as}}{s+2}\\
&= e^{-as}L\left(e^{-x}\right)-e^{-as}L\left(e^{-2x}\right).
\end{aligned}$$

L'égalité (33) qui se lit $L\left(u\left(x-a\right)f\left(x-a\right)\right)=e^{-as}L\left(f\right)$ permet d'écrire

$$\begin{aligned}
L\left(y\right) &= e^{-as}L\left(e^{-x}\right)-e^{-as}L\left(e^{-2x}\right)\\
&= L\left[u\left(x-a\right)\left(e^{-(x-a)}-e^{-2(x-a)}\right)\right].
\end{aligned}$$

On trouve alors

$$y\left(x\right)=u\left(x-a\right)\left(e^{-(x-a)}-e^{-2(x-a)}\right)=\begin{cases} e^{-(x-a)}-e^{-2(x-a)},\ \text{si } x>a,\\ 0,\ \text{si } 0\leq x<a.\end{cases}$$

VII. DÉRIVÉE ET INTÉGRALE DE LA TRANSFORMÉE

Soit $f\left(x\right)$ une fonction transformable et soit $F\left(s\right)=L\left(f\right)\left(s\right)$ sa transformée de Laplace. Calculons $F^{(n)}\left(s\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^nF\left(s\right)}{ds^n} &= \frac{d^n}{ds^n}\int_0^{+\infty}f\left(t\right)e^{-st}dt\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{d^n}{ds^n}f\left(t\right)e^{-st}dt\\
&= \int_0^{+\infty}\left(-t\right)^nf\left(t\right)e^{-st}dt\\
&= L\left(\left(-x\right)^nf\left(x\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $f(x)$ et $x^n f(x)$ sont des fonction transformables, alors

$$\frac{d^n L(f)(s)}{ds^n} = (-1)^n L(x^n f(x))(s). \tag{39}$$

Soit maintenant $f(x)$ une fonction transformable telle que la limite $\lim\limits_{x\to+0} \frac{f(x)}{x}$ existe. Soit $F(s) = L(f)(s)$. Evaluons $\int_s^{+\infty} F(\tau)\, d\tau$:

$$\begin{aligned}
\int_s^{+\infty} F(\tau)\, d\tau &= \int_s^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-\tau t} dt\right] d\tau \\
&\int_0^{+\infty} f(t) \left[\int_s^{+\infty} e^{-\tau t} d\tau\right] dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(t) \left[-\frac{e^{-\tau t}}{t}\right]_{\tau=s}^{+\infty} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt \\
&= L\left(\frac{f(x)}{x}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ sont transformables et si la limite $\lim\limits_{x\to+0} \frac{f(x)}{x}$ existe, alors

$$\int_s^{+\infty} L(f)(\tau)\, d\tau = L\left(\frac{f(x)}{x}\right). \tag{40}$$

Exemple. Trouver l'original $f(x)$ sin son image est $F(s) = \ln\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)$.
Résol.

$$\begin{aligned}
F'(s) &= \frac{d}{ds} \ln \frac{s^2+\omega^2}{s^2} \\
&= -\frac{2\omega^2}{s^3} \frac{s^2}{s^2+\omega^2} \\
&= -\frac{2\omega^2}{s(s^2+\omega^2)} \\
&= 2\frac{s}{(s^2+\omega^2)} - 2\frac{1}{s} \\
&= 2L(\cos\omega x) - \frac{2}{\omega^2} L(1) \\
&= 2L(\cos\omega x - 1).
\end{aligned}$$

D'après l'équation (39), on a alors

$$L(-xf(x)) = F'(s) = L[2(\cos\omega x - 1)],$$

ce qui donne

$$-xf(x) = 2(\cos\omega x - 1),$$

i.e.,

$$f(x) = \frac{2(1-\cos\omega x)}{x}.$$

VIII. CONVOLUTION

L'originale du produit de deux transformées est la convolution des deux originales.
Définition: La convolution de $f(x)$ et $g(x)$, notée $(f*g)(x)$, est la fonction

$$(f*g)(x)=\int_0^x f(\tau)\,g(x-\tau)\,d\tau. \tag{41}$$

On dit que "f convoluée avec g".
Le produit de convolution est commutative: $(f*g)(x)=(g*f)(x)$. En effet,

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_0^x f(\tau)\,g(x-\tau)\,d\tau\\ &= -\int_x^0 f(x-y)\,g(y)\,dy\\ &= \int_0^x g(y)\,f(x-y)\,dy\\ &= (g*f)(x).\end{aligned}$$

Trouvons la transformée de la convolution $f*g$. Nous remarquons d'abord qu'en utilisant la fonction d'Heaviside $u(x)$, on a

$$f(\tau)\,g(t-\tau)\,u(t-\tau)=\begin{cases} f(\tau)\,g(t-\tau), \text{ si } 0<\tau<t,\\ 0, \text{ si } t<\tau,\end{cases}$$

de sorte que

$$\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^{+\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau.$$

Mais alors

$$\begin{aligned}L(f*g) &= \int_0^\infty (f*g)(t)\,e^{-st}dt\\ &= \int_0^\infty\left[\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-st}dt\\ &= \int_0^\infty\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-st}dt\\ &= \int_0^\infty f(\tau)\left[\int_0^{+\infty} e^{-st}g(t-\tau)\,u(t-\tau)\,dt\right]d\tau\\ &= \int_0^\infty f(\tau)\,e^{-s\tau}\left[\int_0^{+\infty} e^{-s(t-\tau)}g(t-\tau)\,u(t-\tau)\,dt\right]d\tau\\ &= \int_0^\infty f(\tau)\,e^{-s\tau}\left[\int_{-\tau}^{+\infty} e^{-sy}g(y)\,u(y)\,dy\right]d\tau\\ &= \int_0^\infty f(\tau)\,e^{-s\tau}\left[\int_0^{+\infty} e^{-sy}g(y)\,dy\right]d\tau\\ &= \int_0^\infty f(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau\times\left[\int_0^{+\infty} e^{-sy}g(y)\,dy\right]\\ &= L(f)\times L(g).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$L(f*g)=L(f)\times L(g). \tag{42}$$

Exemple. Trouver $1*1$ et e^x*e^x.

Résol.

$$(1*1)(x)=\int_0^x 1\times 1dx=x;$$

$$\begin{aligned} e^x*e^x &= \int_0^x e^t e^{x-t}dt \\ &= \int_0^x e^x dt = xe^x. \end{aligned}$$

Exemple. Trouver l'originale de

$$F(s)=\frac{1}{(s-a)(s-b)},\ a\neq b.$$

Résol. Ici,

$$\begin{aligned} L(f) &= \frac{1}{(s-a)(s-b)}=\frac{1}{s-a}\times\frac{1}{s-b} \\ &= L(e^{ax})L\left(e^{bx}\right)=L\left(e^{ax}*e^{bx}\right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax}*e^{bx}=\int_0^x e^{at}e^{b(x-t)}dt \\ &= e^{bx}\int_0^x e^{(a-b)t}dt \\ &= \frac{e^{ax}-e^{bx}}{a-b}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)}=L\left(\frac{e^{ax}-e^{bx}}{a-b}\right),\quad a\neq b.$$

On peut résoudre certaines équations intégrales au moyen de la transformation de Laplace.

Exemple. Résoudre au moyen de la transformation de Laplace l'équation intégrale

$$y(x)=x+\int_0^x y(t)\sin(x-t)\,dt.$$

Résol. On remarque que $\int_0^x y(t)\sin(x-t)\,dt$ est une convolution: $\int_0^x y(t)\sin(x-t)\,dt=y(x)*\sin x$. L'équation prend alors la forme

$$y(x)=x+y(x)*\sin x.$$

En appliquant la transformation de Laplace, on obtient

$$\begin{aligned} L(y) &= L(x)+L(y*\sin x) \\ &= L(x)+L(y)L(\sin x) \\ &\Leftrightarrow \\ L(y) &= \frac{L(x)}{[1-L(\sin x)]} \\ &= \frac{1}{s^2}\frac{1}{1-\frac{1}{1+s^2}} \\ &= \frac{1+s^2}{s^4} \\ &= \frac{1}{6}\frac{3!}{s^4}+\frac{1}{s^2} \\ &= L\left(\frac{x^3}{6}+x\right). \end{aligned}$$

Alors

$$y(x) = x + \frac{1}{6}x^3.$$

IX. TRANSFORMÉES DES FONCTIONS PÉRIODIQUES

Définition: Une originale $f(x)$ est dite périodique de période $p > 0$, si p est le plus petit nombre tel que

$$f(x+p) = f(x), \text{ pour tout } x > 0.$$

Soit $f(x)$ une originale $p-$ périodique. Trouvons l'image de f :

$$L(f) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{np}^{(n+1)p} f(t)\, e^{-st} dt.$$

Efffectue le changement de variables $\tau = t - np$ et trouvons

$$\begin{aligned}
L(f) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{np}^{(n+1)p} f(t)\, e^{-st} dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{p} f(\tau + np)\, e^{-s(\tau+np)} d\tau \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-snp} \int_0^{p} f(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau \\
&= \int_0^{p} f(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-sp}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-e^{-sp}} \int_0^{p} f(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

Ainsi, si $f(x)$ est une originale $p-$ périodique, alors sa transformée de Laplace sera

$$L(f) = \frac{1}{1-e^{-sp}} \int_0^{p} f(t)\, e^{-st} dt. \tag{43}$$

Exemple: Trouver la transformée de Laplace de la semi-rectification de l'onde

$$f(x) = \sin \omega x.$$

Résol. L'onde semi-rectifiée de période $p = 2\pi/\omega$ est

$$g(x) = \begin{cases} \sin \omega x, \text{ si } 0 < x < \pi/\omega, \\ 0, \text{ si } \pi/\omega < x < 2\pi/\omega. \end{cases}$$

Utilisons maintenant la formule (43) pour trouver la transformée de Laplace:

$$\begin{aligned}
L(f)(s) &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}}\int_0^{\pi/\omega}\sin\omega t e^{-st}dt \\
&= \left[\begin{array}{ll} u=\sin\omega t & v'=e^{-st} \\ u'=\omega\cos\omega t & v=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{array}\right] \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}}\left[-\frac{\sin\omega t}{s}e^{-st}\Big|_0^{\pi/\omega}+\frac{\omega}{s}\int_0^{\pi/\omega}\cos\omega t e^{-st}dt\right] \\
&= \frac{\omega}{s\left(1-e^{-2\pi s/\omega}\right)}\int_0^{\pi/\omega}\cos\omega t e^{-st}dt \\
&= \left[\begin{array}{ll} u=\cos\omega t & v'=e^{-st} \\ u'=-\omega\sin\omega t & v=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{array}\right] \\
&= \frac{\omega}{s\left(1-e^{-2\pi s/\omega}\right)}\left[-\frac{\cos\omega t}{s}e^{-st}\Big|_0^{\pi/\omega}-\frac{\omega}{s}\int_0^{\pi/\omega}\sin\omega t e^{-st}\right] \\
&= \frac{\omega\left(1+e^{-s\pi/\omega}\right)}{s^2\left(1-e^{-2\pi s/\omega}\right)}-\frac{\omega^2}{s^2}\frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}}\int_0^{\pi/\omega}\sin\omega t e^{-st} \\
&= \frac{\omega\left(1+e^{-s\pi/\omega}\right)}{s^2\left(1-e^{-2\pi s/\omega}\right)}-\frac{\omega^2}{s^2}L(f)(s).
\end{aligned}$$

On trouve ainsi que

$$\begin{aligned}
L(f) &= \frac{\omega\left(1+e^{-s\pi/\omega}\right)}{s^2\left(1-e^{-2\pi s/\omega}\right)}-\frac{\omega^2}{s^2}L(f)(s) \\
&\Leftrightarrow \\
\left(\frac{s^2+\omega^2}{s^2}\right)L(f)(s) &= \frac{\omega\left(1+e^{-s\pi/\omega}\right)}{s^2\left(1-e^{-2\pi s/\omega}\right)}=\frac{\omega}{s^2\left(1-e^{-\pi s/\omega}\right)} \\
&\Leftrightarrow \\
L(f)(s) &= \frac{\omega}{\left(1-e^{-\pi s/\omega}\right)\left(s^2+\omega^2\right)}.
\end{aligned}$$

Définitivement,

$$L(f)(s)=\frac{\omega}{\left(1-e^{-\pi s/\omega}\right)\left(s^2+\omega^2\right)}.$$

Exemple: Trouver la transformée de Laplace de la rectification totale de l'onde

$$f(x)=\sin\omega x.$$

Résol. L'onde rectifiée de période $p=2\pi/\omega$ est

$$f(x)=|\sin\omega x|=\begin{cases}\sin\omega x, \text{ si } 0<x<\pi/\omega \\ -\sin\omega x, \text{ si } \pi/\omega<x<2\pi/\omega.\end{cases}$$

Par la méthode de l'exemple précèdent, on trouve

$$L(f)(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\coth\frac{\pi s}{2\omega}.$$