Chapitre I. Séries de Fourier et Transformation de Fourier

La représentation d'une fonction par sa série de Taylor est limitée de deux façons: d'abord, elle ne s'applique qu'aux fonctions indéfiniment dérivables et ensuite, elle est locale — les sommes partielles de la série obtenue ne constituent une approximation de la fonction que dans un voisinage (qui peut être très petit) du point autour duquel on la calcule.

La série de Fourier ne souffre pas de ces inconvénients: on peut prescrire à l'avance l'intervalle de convergence et elle permet de représenter des fonctions très générales, présentant même certains types de discontinuités.

Le prix à payer: alors que la série de Taylor utilise les monômes

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ ...\ ,$$

la série de Fourier se sert des fonctions transcendantes

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{\pi}{l}x,\ \cos 2\frac{\pi}{l}x,\ \sin 2\frac{\pi}{l}x,\ ...$$

La résolution des équations aux dérivées partielles, objet d'étude d'un cours d'analyse appliquée, explique en partie le choix de ces fonctions.

La notion de série de Fourier s'introduit tout naturellement quand on considére une fonction périodique. Pour se fixer les idées, soit x la variable indépendente; une fonction f périodique dont la plus petite période est $2l$ satisfait la condition

$$f(x+2pl) = f(x), \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

$\omega = \frac{2\pi}{2l} = 2\pi\nu$ est la pulsation fondamentale de la fonction, ν sa fréquence fondamentale ou fréquence propre, les fréquences de la forme $n\nu$, $n \in \mathbb{N}^*$ constituant les *harmoniques*.

Définition: Nous dirons d'une fonction $f : [-l,\ l[\to \mathbb{R}$ qu'elle est continue par morceaux si sur

C1 il existe un nombre fini $n \geq 0$ de points

$$-l = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = l$$

tels que f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_{j-1},\ x_j[$, $1 \leq j \leq n+1$;

C2 les limites unilatérales

$$f(x_j - 0) = \lim_{x\to x_j^-} f(x), \ f(x_j+0) = \lim_{x\to x_j^+} f(x)$$

existent (comme nombres réels finis) pour chaque $0 \leq j \leq jn+1$.

Remarquons que l'on a toujours, par périodicité, $(f(x_0-0) = f(x_{n+1}-0)$ et $f(x_0+0) = f(x_{n+1}+0)$ alors que la relation $f(x_0+0) = f(x_{n+1}-0)$ n'est pas nécessairement valable.

Définition: Nous dirons d'une fonction f qu'elle satisfait les *conditions de Dirichlet* si elle est bornée et continûment dérivable par morceau (bornée et monotone par morceaux) sur $[-l,\ l[$:

D1 il existe un nombre fini $n \geq 0$ de points

$$-l = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = l$$

tels que f est continûment dérivable sur chaque intervalle ouvert $]x_{j-1},\ x_j[$, $1 \leq j \leq n+1$;

D2 les limites unilatérales

$$\begin{aligned} f(x_j-0) &= \lim_{x\to x_j^-} f(x), \ f(x_j+0) = \lim_{x\to x_j^+} f(x) \text{ et} \\ f'(x_j-0) &= \lim_{x\to x_j^-} f'(x), \ f'(x_j+0) = \lim_{x\to x_j^+} f'(x) \end{aligned}$$

existent (comme nombres réels finis) pour chaque $0 \leq j \leq jn+1$.

L'intégrale d'une fonction f continue par morceaux est définie sur l'intervalle $]-l,\ l[$ par

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n+1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$$

I. LA SÉRIE DE FOURIER

A. La série de Fourier suivant un système orthogonal

Définition: Deux fonction f et g dont le produit $f(x)\, g(x)$ est intégrable sur $[-l,\, l[$ est dit orthogonales sur $[-l,\, l[$ si

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, g(x) = 0.$$

On appelle norme d'une fonction f sur $[-l,\ l[$, le nombre

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-l}^{l} [f(x)]^2\, dx}.$$

Définition: Soit donné sur $[-l,\, l[$ un système de fonctions $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ tel que $\varphi_i(x)\, \varphi_j(x)$ soit intégrable sur $[-l,\, l[$. On dira du système $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ qu'il est dit orthogonales sur $[-l,\, l[$ si

$$\int_{-l}^{l} \varphi_i(x)\, \varphi_j(x) = 0, \quad i \neq j.$$

Exemple: $\left\{1,\ \cos\frac{n\pi}{l}x,\ \sin\frac{n\pi}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ est un système orthogonal sur $[-l,\ l[$; chaque fonctions de ce système est $2l-$ périodique. Trouvons la norme de chacune des fonctions de ce système.

$$\begin{aligned}
\|1\| &= \sqrt{\int_{-l}^{l} dx} = \sqrt{2l}; \\
\left\|\cos\frac{n\pi}{l}x\right\| &= \sqrt{\int_{-l}^{l} \cos^2\frac{n\pi}{l}x dx} \\
&= \sqrt{\int_{-l}^{l} \frac{1+\cos 2\frac{n\pi}{l}}{2} dx} \\
&= \sqrt{l}; \\
\left\|\sin\frac{n\pi}{l}x\right\| &= \sqrt{\int_{-l}^{l} \sin^2\frac{n\pi}{l}x dx} \\
&= \sqrt{\int_{-l}^{l} \frac{1-\cos 2\frac{n\pi}{l}}{2} dx} \\
&= \sqrt{l}.
\end{aligned}$$

Soit $g(x)$ une fonction définie sur $[-l,\ l[$ et soit $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ un système orthogonales sur $[-l,\, l[$. Proposons nous de trouver les nombres c_n tels que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{1}$$

Autrement dit, on se propose de trouver les coefficients c_n de sorte que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\varphi_n(x)$ converge vers la fonction $g(x)$. On supposera que la série du second membre de (1) est intégrable terme à terme sur $[-l,\ l[$. Si nous multiplions les deux membres de l'égalité (1) par $\varphi_m(x)$ et nous intégrons le résultat sur $[-l,\ l[$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{-l}^{l}\varphi_m(x)\,g(x)\,dx &= \int_{-l}^{l}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\right]dx\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}c_n\int_{-l}^{l}\left[\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\right]dx\\ &= c_m\int_{-l}^{l}\left[\varphi_m\right]^2dx\\ &= c_m\left\|\varphi_m\right\|^2.\end{aligned}$$

Alors

$$c_n=\frac{\int_{-l}^{l}\varphi_n(x)\,g(x)\,dx}{\left\|\varphi_n\right\|^2}. \tag{2}$$

Définition: On appelle série de Fourier de $g(x)$ suivant le système orthogonale $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\varphi_n(x)$ où le coefficients c_n sont donnés par l'égalité (2):

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\varphi_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\int_{-l}^{l}\varphi_n(x)\,g(x)\,dx}{\left\|\varphi_n\right\|^2}\varphi_n(x).$$

Les nombres c_n définis par l'égalité (2) sont appelés coefficients de Fourier de la fonction $g(x)$ suivant le système orthogonale $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$.

Notation: Si $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\varphi_n(x)$ est la série de Fourier de $g(x)$ suivant le système orthogonale $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, alors on écrit

$$g(x)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\varphi_n(x)\quad\text{ou encore } S(g)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\varphi_n(x). \tag{3}$$

B. La série trigonométrique de Fourier

Définition: On appelle série trigonométrique de Fourier de la fonction $2l-$périodique $f(x)$ donnée sur $[-l,\ l[$, la série de Fourier de f suivant le système trigonométrique $\left\{1,\ \cos\frac{n\pi}{l}x,\ \sin\frac{n\pi}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f(x)\ \sim\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{4}$$

$$a_n\ =\ \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{5}$$

Remarque: On achoisit d'écrire le terme libre sous la forme $\frac{1}{2}a_0$ afin que la formule pour a_0 soit la même que celle pour les a_n lorsque $n\geq 1$ – ce terme libre est donc la valeur moyenne de la fonction sur une période

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx.$$

Si $f(x)$ est une fonction paire, alors (5) donne

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,\qquad b_n=0;\end{aligned}$$

si $f(x)$ est une fonction impaire, alors (5) donne

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \\ &= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \quad a_n = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la forme de la série trigonométrique de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est de la forme

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, \tag{6}$$

(resp.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\ ). \tag{7}$$

Autrement dit, toute fonction f $2l-$périodique et paire (resp. impaire) se décompose en série trigonométrique de Fourier *suivant les cosinus* (resp. *suivant les sinus*).

Exemples.

1. Pour la fonction $f_1(x) = x(x-\pi)$ si $-\pi \leq x < \pi$, on a

$$S(f_1)(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{4}{n^2}\cos nx + \frac{2\pi}{n}\sin nx\right].$$

2. Pour la fonction $f_2(x) = \pi - |x|$ si $-\pi \leq x < \pi$ on a

$$S(f_2)(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)}\cos(2n+1)x.$$

3. Pour la fonction $f_3(x) = sgn\ x = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{si } -\pi \leq x < \pi,\ x \neq 0 \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$ on a

$$S(f_3)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)}\sin(2n+1)x.$$

La convergence de la série trigonométrique de Fourier est donnée par le théorème suivant.

Théorème de Dirichet (*théorème fondamental sur la série trigonométrique de Fourier*). Si f est une fonction $2l-$ périodique, bornée et monotone par morceau sur l'intervalle $[-l,\ l[$, alors pour tout $x \in]-l,\ l[$ on a

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{8}$$

$$\left.\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right|_{x=\pm l} = \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}. \tag{9}$$

Ici, $f(x-0)$ et $f(x+0)$ sont les limite de $f(x)$ à gauche et à droite, respectivement.

Il découle du théorème précédent qu'en tout point de continuité de f, la série de fourier de f converge vers f.

Exemple. Expandre $f_1(x) = x(x-\pi)$ si $-\pi \leq x < \pi$ en série trigonométrique de Fourier, puis déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

D'après l'exemple 1 ci-dessus, on a

$$S(f_1)(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{4}{n^2}\cos nx + \frac{2\pi}{n}\sin nx\right].$$

Par la suite,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2} &= \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{4}{n^2}\cos nx+\frac{2\pi}{n}\sin nx\right]\Bigg|_{x=-\pi} \\
&= \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} \\
&= \pi^2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^3}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2} &= \pi^2 \\
&\Leftrightarrow \\
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

C. Forme complexe de la série trigonométrique de Fourier

En se servant des formules d'Euler, nous avons

$$\begin{aligned}
\cos\frac{n\pi}{l}x &= \frac{1}{2}\left[\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right)+\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)\right], \\
\sin\frac{n\pi}{l}x &= \frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right)-\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)\right].
\end{aligned}$$

Si on insert ces expressions dans les formules (4) et (5), on aura

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\frac{1}{2}\left[\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right)+\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)\right]+b_n\frac{1}{2i}\left[\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right)-\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)\right] \\
&\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{b_n+ia_n}{2i}\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right)+\frac{ia_n-b_n}{2i}\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)\right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{b_n+ia_n}{2i} &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx+i\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\right] \\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\left(\cos\frac{n\pi}{l}x-i\sin\frac{n\pi}{l}x\right)dx \\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)dx; \\
\frac{ia_n-b_n}{2i} &= \frac{1}{2i}\left[-\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx+i\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\right] \\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\left(\cos\frac{n\pi}{l}x+i\sin\frac{n\pi}{l}x\right)dx \\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right)dx.
\end{aligned}$$

En posant

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \tag{10}$$

on aura

$$\frac{a_n - ib_n}{2} = c_n \quad \text{et} \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{b_n + ia_n}{2i} \exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right) + \frac{ia_n - b_n}{2i} \exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right) \right] \\ &\sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right). \end{aligned}$$

La forme complexe de la série trigonométrique de Fourier est alors

$$S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(in\omega x), \quad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) \exp(-in\omega x)\, dx. \tag{1.11}$$

Ici, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(in\omega x)$ doit être comprise comme

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp(in\omega x).$$

L'ensemble des coefficients $\{c_n\}$ constitue le *spectre* de f. Les relations entre divers coefficients sont

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Pour toute fonction f prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on a d'après la formule (10),

$$\begin{aligned} c_n^* &= \left[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) \exp(-in\omega x)\, dx \right]^* \\ &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) \exp(in\omega x)\, dx \\ &= c_{-n}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$c_n^* = c_{-n}. \tag{11}$$

Supposons que la série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(in\omega x)$ converge uniformément vers la fonction $f(x)$. Alors (11) donne

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-l}^{l} f(x) f^*(x)\, dx \\ &= \int_{-l}^{l} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* \exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right) \right] dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{-l}^{l} c_n c_{n-k}^* \exp\left(i\frac{k}{l}\pi x\right) dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n c_{n-k}^* \int_{-l}^{l} \exp\left(i\frac{k}{l}\pi x\right) dx \\ &= 2l \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n c_{n-k}^* \quad \left(\text{car} \int_{-l}^{l} \exp\left(i\frac{k}{l}\pi x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq 0, \\ 2l, & \text{si } k = 0. \end{cases} \right) \\ &= 2l \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_n^* \\ &= 2l \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n\|^2, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n\|^2 .$$

La relation

$$\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n\|^2 \tag{12}$$

porte le nom de relation de *Bessel-Parceval-Plancherel*. Le second membre (au facteur $2l$ près) évoque le carré de la norme d'un vecteur de composantes c_n d'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. Par conséquent, l'intégrale du premier membre peut recevoir la même interpretation: c'est ce qui est fait couramment quand on considère, en mécanique quantique, l'intégrale du module carré d'une fonction d'onde, $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\overrightarrow{r}, t)| \, d^3r$. On voit même que, en raisonnant avec deux fonctions distinctes $f(x)$ et $g(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-l}^{l} f^*(x) \, g(x) \, dx &= \int_{-l}^{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n^* c_n' \exp\left(i \frac{k}{l} \pi x\right) dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n^* c_n' \int_{-l}^{l} \exp\left(i \frac{k}{l} \pi x\right) dx \\
&= 2l \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n^* c_n',
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\int_{-l}^{l} f^*(x) \, g(x) \, dx = 2l \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n^* c_n', \tag{13}$$

une relation qui évoque le *produit scalaire* dans un espace vectoriel de dimension infinie denombrable, exprimé en termes des composantes des vecteurs sur une base orthonormée. Tout ceci provient du fait que l'ensemble des fonctions $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx)$, $n \in \mathbb{Z}$, constitue une base (orthonormée) pour l'espace des fonctions admettant un dévéloppement en série de Fourier.

Dans la relation de *Bessel-Parceval-Plancherel* (12), l'existance de l'intégrale dans le premier membre assure que la série, donc nécessairement,

$$\lim_{n \to \infty} |c_n| = 0.$$

D'après l'égalité

$$\frac{a_n - ib_n}{2} = c_n,$$

on a alors

$$0 = \lim_{n \to \infty} |c_n| = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

et compte tenue des formules pour les coefficients de Fourier, on a par conséquent

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-l}^{l} f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x dx = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = 0. \tag{14}$$

Définition: On appelle suite des sommes partielles de la série de Fourier sous la forme complexe, la suite des fonctions $S_N(x)$ définie par

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp(in\omega x). \tag{15}$$

Ecrivons la relation entre la suite (15) et la fonction f. Pour cela, nous remplacons dans (15) c_n par son expression (10):

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\exp(-in\omega t)\,dt\right]\exp(in\omega x) \\
&= \sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\exp in\omega(x-t)\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left[f(t)\sum_{n=-N}^{N}\exp in\omega(x-t)\right]dt \\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left[f(t)\sum_{n=-N}^{N}\left[\exp i\omega(x-t)\right]^n\right]dt.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{n=-N}^{N}\left[\exp i\omega(x-t)\right]^n = \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega(x-t)}{\sin\frac{1}{2}\omega(x-t)},$$

on trouve

$$S_N(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega(x-t)}{\sin\frac{1}{2}\omega(x-t)}dt. \tag{16}$$

La somme $S_N(x)$ se rencontre dans les problemes de difraction par un reseau (fini) de N atomes, un certain déphasage spatial élémentaire entre deux ondes difusées jouant le rôle de ωt.

D. Le phénomène de Gibbs

Il faut savoir qu'au voisinage d'un point de discontinuité de la fonction $f(x)$, la somme partielle de la série de Fourier

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{2}x$$

oscille autour de la valeur de la fonction et la dépasse d'environ 18%. C'est le phénomène de Gibbs qui ne disparait pas quand N augmente mais se rapproche du saut.

Exemple: Pour la fonction $f(x) = sgn\ x = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{si } -\pi \le x < \pi,\ x \neq 0 \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$ on a

$$S(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)}\sin(2n+1)x,$$

ce qui donne

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=1}^{N}\frac{4}{\pi(2n+1)}\sin(2n+1)x.$$

E. Série de Fourier discrète et convolution

Soit $f(x)$ un signal $2l-$périodique sur $[0,\ 2l[$ échantillonné en N points:

$$f_k = f(x_k),\ x_k = k\frac{2l}{N},\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N-1. \tag{17}$$

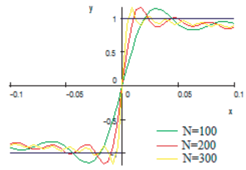

FIG. 1: Illustration du phénomène de Gibbs.

On veut construire le polynome trigométrique complexe:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \exp(inx)$$

qui interpole $f(x)$ aux nœuds x_k :

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \exp(inx_k), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N-1. \tag{18}$$

Si nous multiplions les deux membre de (18) par $\exp(-imx_k)$ et prenoms la somme suivant tous les k, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} f_k \exp(-imx_k) &= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} c_n \exp(inx_k)\exp(-imx_k) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} c_n \exp[i(n-m)x_k] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} c_n \sum_{k=0}^{N-1} \exp[i(n-m)x_k] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} c_n \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[i(n-m)k\frac{2l}{N}\right] \\
&= Nc_m,
\end{aligned}$$

car, par l'orthogonalité des exponentielles discrètes

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[i(n-m)k\frac{2l}{N}\right] = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ N, & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k \exp(-imx_k) = mc_m.$$

On trouve alors

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \exp(-inx_k). \tag{19}$$

Notons

$$f = [f_0, f_1, ..., f_{N-1}]^T$$

le n-vecteur signal. Alors la transformée de Fourier discrète (TFD/DFT) de f, appelée spectre des fréquences de f, est le n–vecteur

$$\widehat{f} = \left[\widehat{f}_0, \widehat{f}_1, ..., \widehat{f}_{N-1}\right]^T$$

avec

$$\widehat{f}_n = Nc_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \exp(-inx_k).$$

En notation matricielle, on a

$$\begin{aligned} \widehat{f} &= F_N f; \\ [c_0, c_1, ..., c_{N-1}]^T &= \frac{1}{N} F_N f, \end{aligned}$$

F_n étant la matrice de Fourier d'ordre N définie par $F_N = (e_{Nk})$, avec

$$\begin{aligned} e_{jk} &= \exp(-ijx_k) \\ &= \exp\left(-\frac{2iljk}{N}\right) \\ &= \left[\exp\left(-i\frac{2l}{N}\right)\right]^{jk} \\ : &= \omega^{jk}, \\ \omega &= \omega_N = \exp\left(-i\frac{2l}{N}\right). \end{aligned}$$

i.e.,

$$e_{ik} = \omega^{jk}, \quad j, k = 0,\ 1,\ ...,\ N-1.$$

Exemple: Soit le signal $f = [2, 4, 6, 8]^T$ en $x = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$. Trouver $[c_0, c_1, c_2, c_3]^T$.

Résol. Pour cet exemple, $N = 4$, $l = \pi$. On a par conséquent $\omega = \exp(-i2\pi/4) = \exp(-i\pi/2) = -i$. Alors $e_{jk} = \omega^{jk} = (-i)^{jk}$ et

$$\begin{aligned} \widehat{f} &= F_4 f = \begin{bmatrix} \omega^{00} & \omega^{01} & \omega^{02} & \omega^{03} \\ \omega^{10} & \omega^{11} & \omega^{12} & \omega^{13} \\ \omega^{20} & \omega^{21} & \omega^{22} & \omega^{23} \\ \omega^{30} & \omega^{31} & \omega^{32} & \omega^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ &= [20, -4+4i, -4, -4-4i]^T. \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} [c_0, c_1, c_2, c_3]^T &= \frac{1}{4}[20, -4+4i, -4, -4-4i]^T \\ &= [5, -1+i, -1, -1-i]^T. \end{aligned}$$

La convolution discrète est d'une utilisation fréquente dans les applications. Elle applique deux $n-$vecteurs $f = [f_0, f_1, ..., f_{N-1}]^T$ et $g = [g_0, g_1, ..., g_{N-1}]^T$ en un $n-$vecteur noté $f * g$ par la formule

$$\begin{aligned} f * g &= C \times g, \\ C &= \begin{bmatrix} f_0 & f_{N-1} & f_{N-2} & \cdots & f_1 \\ f_1 & f_0 & f_{N-1} & \cdots & f_2 \\ f_2 & & f_0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f_{N-1} \\ f_{N-1} & f_{N-2} & f_{N-3} & \cdots & f_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque: Pour écrire la matrice circulante C, on remplie d'abord la diagonale principale qui est constituée de f_0. Par la suite, on remplie le triangle inférieur en incrémentant l'indice de f à partir de f_0. Enfin, on remplie le triangle supérieur du bas vers le haut en decrementant l'indice de f en commençant par f_{N-1} après f_0.

Exemple: Calculer la convolution $f * g$ des $4-$vecteurs f et g.

Résol. Soit $f = [f_0, f_1, f_2, f_3]^T$ et $g = [g_1, g_2, g_3, g_4]^T$. Alors

$$\begin{aligned} f * g &= Cg = \begin{bmatrix} f_0 & f_3 & f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 & f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 & f_0 & f_3 \\ f_3 & f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_0g_0 + f_3g_1 + f_2g_2 + f_1g_3 \\ f_1g_0 + f_0g_1 + f_3g_2 + f_2g_3 \\ f_2g_0 + f_1g_1 + f_0g_2 + f_3g_3 \\ f_3g_0 + f_2g_1 + f_1g_2 + f_0g_3 \end{bmatrix} \blacksquare \end{aligned}$$

Les matrices circulantes C ont des propriétés très intéressantes. Si C est d'ordre n, alors ses vecteurs propres sont les colonnes de la matrice de Fourier $F = F_N$.

II. TRANSFORMATION DE FOURIER

A. Définitions et exemples

Soit $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone par morceaux et bornée sur tout intervalle $[-l,\ l]$ et d'énergie finie, i.e., $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Supposons de plus que f est absolument sommable sur $\mathbb{R}$, i.e., $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < +\infty.$$

Sur tout intervalle $(-l, l)$, on peut écrire la série de Fourier de f. Admettant que cette série de fourier converge vers f, on peut écrire

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{20}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt. \tag{21}$$

(en réalité, on a à gauche de (20) $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ et non $f(x)$, ce qui provient du théorème de Diriclet). Inserons (21) dans (20) et effectuons les regroupements nécessaires:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x + \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\right] dt \\ &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left[\frac{n\pi}{l}(t-x)\right] dt \\ &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \left\{ f(t)\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left[\frac{n\pi}{l}(t-x)\right] \right\} dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left[\frac{n\pi}{l}(t-x)\right] dt.$$

Maintenat, passons à la limite quand $l \to +\infty$ dans cette égalité et obtenons, compte tenue du fait que $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{l \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\left[\frac{n\pi}{l}(t-x)\right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{l \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\left[\frac{n\pi}{l}(t-x)\right] dt. \end{aligned}$$

En posant

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l},\ \Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{l},$$

on a $\Delta\omega_n \to 0$ quand $l \to +\infty$ et par la suite,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\Delta\omega_n \to 0} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \Delta\omega_n \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega_n (t-x)]\, dt \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega, \end{aligned}$$

car $\sum_{n=1}^{+\infty} \Delta\omega_n \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega_n (t-x)]$ est la somme intégrale de la fonction $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)]$. Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega.$$

Comme fonction de ω, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)]$ est paire, et par conséquent,

$$\int_{0}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)] \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega,$$

où l'intégrale à droite par rapport à ω est comprise au sens de la valeur principale:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega &= V.P \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega \\ &= \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega \end{aligned}$$

On trouve finalement

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega.$$

puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin[\omega (t-x)]$ est paire comme fonction de ω, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin[\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega - i \times 0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin[\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left\{ \cos[\omega (t-x)] - i \sin[\omega (t-x)] \right\} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp[-i\omega (t-x)]\, dt \right] d\omega, \end{aligned}$$

i.e.,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp\left[-i\omega(t-x)\right]dt\right]d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\omega x\right]d\omega\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp\left[-i\omega t\right]dt\right]
\end{aligned}
$$

Si nous posons

$$
g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp\left[-i\omega t\right]dt, \tag{22}
$$

alors

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\exp\left[i\omega x\right]d\omega. \tag{23}
$$

La fonction $g(\omega)$ définie par la formule (22) est appelée **transformee de Fourier** de la fonction f. La formule (23) qui exprime la fonction f en terme de sa transformee de Fourier est appelée **formue d'inversion**.

Le passage d'une fonction f à sa transformé de Fourier est appelé *transformation de fourier*, alors le processus qui permet de trouver une fonction à partir de sa transformée de Fourier est denomé *transformation inverse de Fourier*.

La notation suivante est utilisée

$$
F(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp\left[-i\omega t\right]dt,
$$

ou encore

$$
\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp\left[-i\omega t\right]dt.
$$

La formule d'inversion (2.4) devient alors

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(\omega)\exp\left[i\omega x\right]d\omega,
$$

ou encore

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\exp\left[i\omega x\right]d\omega.
$$

L'opérateur F est appelé opérateur de Fourier. Il est évident que F est un opérateur linéaire:

$$
F(af+bg)(\omega) = aF(f)(\omega) + bF(g)(\omega).
$$

La transformation de Fourier représente la fonction $f(x)$ par $\widehat{f}(\omega)$ dans le domaine des fréquences ω et $\widehat{f}(\omega)$ est l'amplitude (complexe) du signal en la fréquence ω.

Puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ est uniformément continue (et est par conséquent continue) et $\widehat{f}(\omega) \to 0$ quand $\omega \to \infty$.

On présente quelques exemples de transformées de Fourier qui sont importantes dans les applications.

1. La mesure de Dirac et sa transformée de Fourier

Définition: O appelle mesure de Dirac ou encore "fonction" de Dirac, une "fonction" δ définie par

$$
\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \text{et telle que} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.
$$

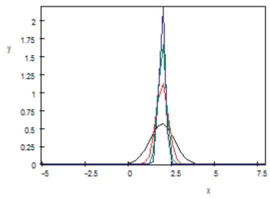

FIG. 2: $\delta_n(x-x_0)$ pour $n=1$, 2, 3, et 4 avec $x_0=2$.

La mesure de Dirac $\delta(x)$ est une "fonction" dont la règle d'utilisation est

$$\int_a^b \varphi(x)\,\delta(x-x_0)\,dx=\varphi(x_0)\,,\quad -\infty\le a<b\le+\infty.$$

La mesure de Dirac $\delta(x)$ peut être définie comme limite d'une suite de fonction (le choix est vaste); soit par exemple

$$\delta_n(x-x_0)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-n^2(x-x_0)^2\right].$$

Chacune de ces fonctions est est une gaussienne présentant un et un seul pic en $x=x_0$ de largeur d'ordre $\frac{1}{n}$ et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\,dx=1$. Il en resulta que l'association avec une bonne fonction $\varphi(x)$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,\delta(x-x_0)\,dx\simeq\varphi(x_0)\,;$$

à la limite, c'est bien la règle d'utilisation de $\delta(x)$.

Trouvons la transformée de Fourier de la mesure de Dirac. Par définition et compte tenue de l'"utilisation de $\delta(x)$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= F(\delta(x-x_0))(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\omega t)\,\delta(t-x_0)\,dt\\ &= \exp(-i\omega x_0)\,.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$F(\delta(x))(\omega)=1.$$

Souvenons nous de l'utilisation de la mesure de dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\delta(t-x)\,dt=f(x)\,.$$

En combinant (22) et (23), on peut écrire pour "bonne" toute fonction $f(x)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[i\omega x]\,d\omega\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\exp[-i\omega t]\,dt\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[i\omega(x-t)]\,d\omega\right].\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\delta(t-x)\,dt &= f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[i\omega(x-t)]\,d\omega\right]\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[i\omega(x-t)]\,d\omega\right],\end{aligned}$$

i.e.,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\delta(t-x)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-i\omega(t-x)]\,d\omega\right],$$

ce qui montre que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-i\omega\left(t-x\right)\right]d\omega=\delta\left(t-x\right),$$

soit

$$\begin{aligned}\delta\left(t\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-i\omega t\right)d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\times\exp\left(-i\omega t\right)d\omega.\end{aligned}$$

On trouve alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty}1\times\exp\left(-i\omega t\right)d\omega=2\pi\delta\left(t\right).$$

Cette relation, établie intuitivement et sans grande rigueur, montre que $\delta\left(x\right)$ est la transformée inverse de Fourier de $f\left(x\right)=1$. Ceci se confirme en contemplant l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(x\right)\exp\left(-i\omega x\right)dx=1$, qui confirme le fait que $F\left(\delta\left(x\right)\right)\left(\omega\right)=1$; au total,

$$F\left(\delta\left(x\right)\right)\left(\omega\right)=1,\quad F^{-1}\left(1\right)\left(x\right)=\delta\left(x\right).$$

Plus généralement,

$$F\left(\delta\left(x-x_0\right)\right)\left(\omega\right)=\exp\left(-i\omega x_0\right),\quad F^{-1}\left(\exp\left(-i\omega x_0\right)\right)\left(x\right)=\delta\left(x-x_0\right)$$

Si dans l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty}1\times\exp\left(-i\omega t\right)d\omega=2\pi\delta\left(t\right)$ on permute t et ω, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}1\times\exp\left(-i\omega t\right)dt=2\pi\delta\left(\omega\right),$$

ce qui donne

$$F\left(1\right)=2\pi\delta\left(\omega\right).$$

De ce qui précède, on obtient la forme suivante pour $\delta\left(x\right)$:

$$\delta\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-i\omega t\right)d\omega.$$

2. Autres exemples

Exemple: Trouver la transformée de Fourier de l'impulsion décroissante paire

$$f\left(x\right)=\exp\left(-a\left|x\right|\right),\quad a>0.$$

Résol.

$$\begin{aligned}\widehat{f}\left(\omega\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t\right)\exp\left(-i\omega t\right)dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-a\left|t\right|\right)\exp\left(-i\omega t\right)dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-a\left|t\right|-i\omega t\right)dt\\ &= \int_{-\infty}^{0}\exp\left[\left(a-i\omega\right)t\right]dt+\int_{0}^{+\infty}\exp\left[-\left(a+i\omega\right)t\right]dt\\ &= \left[\frac{1}{a-i\omega}\exp\left[\left(a-i\omega\right)t\right]\right]_{-\infty}^{0}-\left[\frac{1}{a+i\omega}\exp\left[-\left(a+i\omega\right)t\right]\right]_{0}^{+\infty}\\ &= \frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\\ &= \frac{2a}{a^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F\left(\exp\left(-a\left|x\right|\right)\right)(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}.\ \blacksquare$$

Exemple: Trouver la transformée de Fourier de l'impulsion décroissante impaire

$$f(x)=\left\{\begin{array}{c}\exp(-ax)\,,\ \text{si } x>0,\\ -\exp(ax)\,,\ \text{si } x<0,\\ \text{avec } a>0.\end{array}\right.$$

Résol.

$$\begin{aligned}F(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\exp(-i\omega t)\,dt+\int_{0}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{0} -\exp(at)\exp(-i\omega t)\,dt+\int_{0}^{+\infty} \exp(-at)\exp(-i\omega t)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{0} -\exp\left[t(a-i\omega)\right]dt+\int_{0}^{+\infty} \exp\left[-t(a+i\omega)\right]dt\\ &= \left[-\frac{1}{a-i\omega}\exp\left[t(a-i\omega)\right]\right]_{-\infty}^{0}-\left[\frac{1}{a+i\omega}\exp\left[-t(a+i\omega)\right]\right]_{0}^{+\infty}\\ &= \frac{1}{a+i\omega}-\frac{1}{a-i\omega}\\ &= -\frac{2i\omega}{a^2+\omega^2}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Exemple: Trouver la transformée de Fourier de la fonction

$$sgn(x)=\left\{\begin{array}{l}1,\ \text{si } x>0,\\ -1,\ \text{si } x<0.\end{array}\right.$$

Résol.

$$\begin{aligned}F(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,dt\\ & \int_{-\infty}^{0} -\exp(-i\omega t)\,dt+\int_{0}^{+\infty}\exp(-i\omega t)\,dt\\ &= \left[\frac{1}{i\omega}\exp(-i\omega t)\right]_{-\infty}^{0}-\left[\frac{1}{i\omega}\exp(-i\omega t)\right]_{0}^{+\infty}\\ &= \frac{1}{i\omega}+\frac{1}{i\omega}=-\frac{2i}{\omega}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Exemple. Trouver la transformée de Fourier de la fonction de Heaviside

$$H(x)=\left\{\begin{array}{l}1,\ \text{si } x>0\\ 0,\ \text{si } x<0.\end{array}\right.$$

Résol. Pour cet exemple, nous utilisons la linéarité de l'operateur F, sur $g_1(x)=1$ et $g_2(x)=sgn(x)$

$$H(x)=\frac{1}{2}g_1(x)+\frac{1}{2}g_2(x).$$

Alors

$$\begin{aligned}F(H)(\omega) &= F\left(\frac{1}{2}g_1+\frac{1}{2}g_2\right)(\omega)\\ &= \frac{1}{2}F(g_1)(\omega)+\frac{1}{2}F(g_2)(\omega)\\ &= \pi\delta(\omega)-\frac{i}{\omega},\end{aligned}$$

car

$$F(g_1)(\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad \text{et } F(g_2)(\omega) = -\frac{2i}{\omega}.$$

ainsi,

$$F(H)(\omega) = \pi\delta(\omega) - \frac{i}{\omega}.$$

B. Propriétés de la transformation de Fourier

■ **Linéarité**. L'intégrale étant une opération linéaire, on a

$$F(af + bg) = aF(f) + bF(g)$$

pour tous scalaires constants a et b.
La transformation de Fourier est donc bien adaptée à la résolution d'équations *linéaires,* mais il faut garder une chose en tête: quand on l'utilise à cette fin, on ne peut trouver par construction que des solutions ayant une transformée de Fourier.

■ **Translation**. Etant donnée une fonction $f(x)$, sa translaté de a est par définition la fonction:

$$(T_a f)(x) = f(x-a).$$

La transformée de $T_a f$ est ainsi

$$\begin{aligned} F(T_a f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (T_a f)(t) \exp(-i\omega t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a) \exp(-i\omega t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a) \exp[-i\omega(t-a) - i\omega a]\, dt \\ &= \exp(-i\omega a) \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \exp[-i\omega s]\, ds \\ &= \exp(-i\omega a) F(f)(\omega). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F(T_a f)(\omega) = \exp(-i\omega a) F(f)(\omega).$$

Cette propriété très simple (et en un sens trivial) est utilisée pour énoncer des résultats forts et importants, fondés sur l'invariance galiléenne de l'espace (physique) par translation. de même; si $f(x)$ est l'attribut d'un système ayant une symétrie de translation de a, alors on a $f(x-a) = f(x)$: il en résulte qu'alors la transformée de Fourier doit être telle que $[\exp(-i\omega a) - 1] F(f) = 0$, ce qui signifie que $F(f) = 0$ sauf aux points tels que $\omega a \in 2\pi\mathbb{Z}$, soit $\omega \in \frac{2\pi}{a}\mathbb{Z}$. Ceci était à attendre: $f(x-a) = f(x)$ signifie que la fonction $f(x)$ est $a-$périodique et qu'elle est décomposable en série de Fourier.

■ **Modulation**. Etant donnée une fonction $f(x)$, sa modulée en ω_0 est par définition $\exp(-i\omega_0 x) f(x)$. On a

$$\begin{aligned} F(\exp(-i\omega_0 x) f(x))(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega_0 t) f(t) \exp(-i\omega t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp[-i(\omega + \omega_0) t]\, dt \\ &= F(f)(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F\left(\exp\left(-i\omega_0 x\right) f\left(x\right)\right)\left(\omega\right) = F\left(f\right)\left(\omega+\omega_0\right).$$

La modulation dans l'espace direct revient alors à une translation dans l'espace réciproque – un résultat dual de celui obtenu à propos de la transformée de Fourier d'une fonction translatée. Si x est le temps t, on voit qu'un facteur oscillatoire $\exp\left(-i\omega_0 x\right)$ pour $f\left(t\right)$ supplémentaire décale toutes les pulsations de ω_0 pour $F\left(f\right)\left(\omega\right).$

- **Dilatation**. Un changement d'échelle sur la variable d'une fonction $f\left(x\right)$ définit une nouvelle fonction f_λ telle que $f_\lambda\left(x\right) = f\left(\lambda x\right).$ Alors

$$\begin{aligned} F\left(f_\lambda\right)\left(\omega\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda\left(t\right)\exp\left(-i\omega t\right)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\lambda t\right)\exp\left(-i\omega t\right)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\lambda t\right)\exp\left(-i\frac{\omega}{\lambda}\lambda t\right)\frac{d\lambda t}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(s\right)\exp\left(-i\frac{\omega}{\lambda}s\right)ds \\ &= \frac{1}{\lambda}F\left(f\right)\left(\omega\right), \end{aligned}$$

i.e.,

$$F\left(f\left(\lambda x\right)\right)\left(\omega\right) = \frac{1}{\lambda}F\left(f\right)\left(\frac{\omega}{\lambda}\right).$$

- **Conjugaison**.

$$\begin{aligned} F\left(\overline{f}\right)\left(\omega\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}\left(t\right)\exp\left(-i\omega t\right)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f\left(t\right)\exp\left(i\omega t\right)}dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)\exp\left(i\omega t\right)dt} \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)\exp\left(-i\left(-\omega\right)t\right)dt} \\ &= \overline{F\left(f\right)\left(-\omega\right)}, \end{aligned}$$

i.e.

$$F\left(\overline{f}\right)\left(\omega\right) = \overline{F\left(f\right)\left(-\omega\right)}.$$

Cette propriété joue un rôle important en mécanique quantique, dans la discussion de l'invariance par renversement du temps.

- **Dérivation**. Un résulta très utile en pratique est le lien entre les transformée de Fourier d'une fonction et ses derivées; sans surprise, on va retrouver (à des modifications de détail près) une relation du même genre que dans la présentaton des séries de Fourier.
Soit une fonction dérivable f et soit f' sa dérivée; la transformée de Fourier de f' dans l'hypothèse où elle existe

est par définition

$$\begin{aligned}
F(f')(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\exp(-i\omega t)\,dt \\
&= \begin{bmatrix} u=\exp(-i\omega t) & v'=f \\ u'=-i\omega\exp(-i\omega t) & v=f \end{bmatrix} \\
&= [f(t)\exp(-i\omega t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -i\omega f(t)\exp(-i\omega t) \\
&= i\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t) \\
&= i\omega F(f)(\omega),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$F(f')(\omega) = i\omega F(f)(\omega).$$

Le terme tout intégré est nul: en supposant f simplement intégrable, nécessairement $f(t)\to 0$ quand $t\to\infty$. Le même travail pour $f^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx}f(x)$ donne

$$F\left(f^{(m)}\right)(\omega) = (i\omega)^m F(f)(\omega).$$

Ces propriétés jouent un rôle essentiel dans l'intégration des équations différentielles (linéaires).
Exemple. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{aligned}
y'(x) - \omega_0 y(x) &= 0, \\
y(0) &= y_0,
\end{aligned}$$

ω_0 et y_0 étant deux réels donnés.
Il s'agit ici du problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire la plus simple possible. sa solution est visblement $y(x) = y_0\exp(\omega_0 t)$, une fonction qui n'a visiblement pas de transformée de Fourier, quelque soit ω_0 réel (ou même complexe).
Prenons le problème autrement. Comme l'équation est linéaire, la transformation de Fourier est *a priori* utile:

$$\begin{aligned}
F(y'(x) - \omega_0 y(x)) &= F(0) \\
&\Leftrightarrow \\
F(y') - \omega_0 F(y) &= 0 \Leftrightarrow \\
i\omega F(y) - \omega_0 F(y) &= 0 \Leftrightarrow \\
[i\omega - \omega_0]F(y) &= 0.
\end{aligned}$$

On obtient alors l'équation

$$[i\omega - \omega_0]F(y) = 0$$

qui signifie que $F(y) = 0$ tant que $\omega \neq -i\omega_0$, ce qui incite à poser $F(y)(\omega) \propto \delta(\omega + i\omega_0)$, sans s'arrêter que la mesure δ de Diract n'a été définie que pour les x réels. Ceci étant fait, il revient que

$$y(x) \propto \exp(i(-i\omega_0 x)) = \exp(\omega_0 x)$$

qui est bien la solution.

1. **Dérivée de la transformée**. Soit $F(f)(\omega)$ la transformée de fourier de f. alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\omega}F(f)(\omega) &= \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\omega}f(t)\exp(-i\omega t)\,dt \\
&= -i\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\exp(-i\omega t)\,dt \\
&= -iF(xf(x)).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{d}{d\omega}F(f)(\omega) = -iF(xf(x)).$$

Un calcul analoque donne

$$\frac{d^m}{d\omega^m}F(f)(\omega) = (-i)^m F(x^m f(x)).$$

Ces propriétés sont importantes pour calculer les transformées de Fourier.

Exemple. Trouver la transformée de Fourier de $f(x) = \exp\left(-ax^2\right)$, $a > 0$.
Résol. Par définition,

$$F(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2\right)\exp(-i\omega x)\,dx.$$

Calculons cette intégrale par partie:

$$\begin{aligned}
F(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2\right)\exp(-i\omega x)\,dx \\
&= \begin{bmatrix} u = \exp\left(-ax^2\right) & v' = \exp(-i\omega x) \\ u' = -2ax\exp\left(-ax^2\right) & v = -\frac{1}{i\omega}\exp(-i\omega x) \end{bmatrix} \\
&= \left[-\frac{1}{i\omega}\exp(-i\omega x)\exp\left(-ax^2\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{2a}{i\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} x\exp(-i\omega x)\exp\left(-ax^2\right)dx \\
&= \frac{2a}{\omega}i\int_{-\infty}^{+\infty} x\exp(-i\omega x)\exp\left(-ax^2\right)dx \\
&= -\frac{2a}{\omega}\left(-i\int_{-\infty}^{+\infty} x\exp\left(-ax^2\right)\exp(-i\omega x)\,dx\right) \\
&= -\frac{2a}{\omega}\frac{d}{d\omega}F(f)(\omega),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$F(f) + \frac{2a}{\omega}\frac{d}{d\omega}F(f) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\omega}F(f) + \frac{\omega}{2a}F(f) = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire homogene du premier ordre et dont la solution générale est

$$F(f)(\omega) = C\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right),$$

C étant la constante d'intégration. Pour déterminer cette constante C, nous cherchons $F(f)(0)$ en utilisant la définition:

$$\begin{aligned}
F(f)(0) &= \left.\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2\right)\exp(-i\omega x)\,dx\right|_{\omega=0} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2\right)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\sqrt{a}x\right)^2\right)d\sqrt{a}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha^2\right)d\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sqrt{\frac{\pi}{a}} = F(f)(0) = C\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)\Big|_{\omega=0} = C$. on trouve finalement

$$\boxed{F\left[\exp\left(-ax^2\right)\right] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right).}$$

■ **Convolution**. On définit la convolution de deux fonction f et g comme la fonction notée $f*g$ définie par

$$(f*g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt.$$

La transformée de Fourier de la convolution est

$$F(f*g)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt\right]\exp(-i\omega x)\, dx.$$

Si f et g sont deux "bonnes" fonctions (par exemple, si elles sont absolument intégrable), alors on aura

$$\begin{aligned}
F(f*g)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt\right]\exp(-i\omega x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\times\exp(i\omega t)\, g(x-t)\, dt\right]\exp(-i\omega x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\times\exp\left[-i\omega(x-t)\right] g(x-t)\, dt\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\times\exp\left[-i\omega(x-t)\right] g(x-t)\, dx\right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\, dt\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-i\omega(x-t)\right] g(x-t)\, dx\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\, dt\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(s)\exp\left[-i\omega s\right] ds\right] \\
&= F(f)(\omega)\times F(g)(\omega).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F(f*g)(\omega) = (F(f)\times F(g))(\omega),$$

i.e., que la transformée de Fourier du produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier.

On peut aussi montre que la tranformée de Fourier d'un produit de deux fonctions est égale au produit de convolution de leur transformée de Fourier:

$$F(f\times g)(\omega) = \frac{1}{2\pi}F(f)*F(g) \Leftrightarrow F^{-1}\left(F(f)*F(g)\right)(x) = 2\pi f(x)\times g(x).$$

Le théorème de convolution est utile pour la résolution des équations intégrales linéaires où figure un noyau intégral de la forme

$$y(x) = \varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, k(x-t)\, dt. \tag{24}$$

En posant $Y = F(y)$, $\phi = F(\varphi)$ et $K = F(k)$, on aura

$$\begin{aligned}
Y &= F(y) = F\left(\varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, k(x-t)\, dt\right) \\
&= F(\varphi) + F\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, k(x-t)\, dt\right) \\
&= \phi + YK,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} Y &= \phi + YK \Leftrightarrow (1-K)\,Y = \phi \\ &\Leftrightarrow\; Y = \frac{\phi}{1-K},\ \text{si } \phi(\omega) \ \text{non identiquement nulle.} \end{aligned}$$

On trouve alors $Y = \frac{\phi}{1-K}$ et la formule d'inversion donne $y(x)$:

$$y_{part}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\omega)}{1-K(\omega)} \exp(i\omega x)\, d\omega.$$

(y_{part} =solution particulière). Cette intégrale, en pratique, se calcule par résidus, en prenant compte les singularités de $\phi(\omega)$ et les zéros de $1-K(\omega)$. $y_{part}(x)$ ne donne pas la solution générale de l'équation: si on ajoute à y_{part} n'importe quelle solution de l'équation homogene $y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, k(x-t)\, dt$, on obtient de nouveau une solution.

Si $\varphi(x) \equiv 0$, alors $\phi(\omega)$ sera identiquement nulle et on obtiendra

$$(1-K(\omega))\, Y(\omega) = 0,$$

ce qui veut dire que $Y(\omega) = 0$ pour tout $\omega : 1-K(\omega) \neq 0$. On peut alors écrire

$$Y(\omega) = \sum_p C_p \delta(\omega - \omega_k),$$

C_p étant des constantes arbitraires et ω_p – les zéros de $1-K(\omega)$. On utilise maintenant la formule d'inversion pour trouver $y(x)$:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)\exp(i\omega x)\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_p C_p \delta(\omega-\omega_k)\exp(i\omega x)\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_p C_p \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_k)\exp(i\omega x)\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_p C_p \exp(i\omega_p x), \end{aligned}$$

i.e.,

$$y_0(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_p C_p \exp(i\omega_p x).$$

En sommant $y_{part}(x)$ et $y_0(x)$, on trouve la solution générale de (**??**):

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_p C_p \exp(i\omega_p x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\omega)}{1-K(\omega)}\exp(i\omega x)\, d\omega.$$

Le théorème de convolution joue également un rôle important en Traitement du signal. D'une façon générale, soit un signal $e(t)$ injecté à l'entrée d'une "boîte noire", dont le fonctionnement est supposé linéaire sur toute la gamme de fréquence. Cette boîte est caractérisée par une *fonction d'appareil,* qui exprime sa façon de réagir à un signal d'entrée de fréquence f donnée. A la sortie, on récupère un signal $s(t)$. si on note $E(\omega) = F(e)(\omega)$, $S(\omega) = F(s)(\omega)$, alors

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f-t)\, E(t)\, dt.$$

Ici, $A(f)$ est une fonction caracteristique de l'appareil. La relation ci-dessus exprime que l'on accumule en f, tout ce que la boîte peut ramasser à $f-t$. Pour une boîte parfaite, on a $A(f) = \delta(f)$, donc $S(f) = E(f)$, et $s(t) = e(t)$: le signal de sortie est alors l'exacte réplique du signal d'entrée.